DOI 10.52209/1609-1825_2023_3_17 УДК 539.3

Компьютерное моделирование изгиба прямоугольной многослойной пластины с использованием численного подхода

[1]***КАСИМОВ Абай Тусупбекович,** *к.т.н., доцент, kasimov5301@mail.ru,*
[2]**ЕСЕНБАЕВА Гулсима Ахмедиевна,** *к.ф.-м.н., профессор, esenbaevagulsima@mail.ru,*
[1]**ЖОЛМАГАМБЕТОВ Сырлыбек Рысбекович,** *к.т.н., syrlybekzh@mail.ru,*
[2]**КАСИМОВ Бауржан Абаевич,** *магистрант, baurrito@mail.ru,*
[1]**ҚАСЫМОВ Айдос Абайұлы,** *магистрант, gavslic@gmail.com,*
[1]НАО «Карагандинский технический университет имени Абылкаса Сагинова», Казахстан, Караганда, пр. Н. Назарбаева, 56,
[2]НАО «Карагандинский университет имени Е.А. Букетова», Казахстан, Караганда, ул. Университетская, 28,
**автор-корреспондент.*

Аннотация. *Компьютерое моделирование изгиба прямоугольной многослойной пластины с использованием численного подхода проводится на основе дифференциальных уравнений варианта уточненной теории многослойных пластин, в которых учитывают: поперечный сдвиг, давление слоев друг на друга, деформации нормали, ортотропию слоев, асимметрию структуры. Общий порядок системы равен 12. Неизвестными являются три функции координатной поверхности: функция усилий, прогиба и сдвига. Краевые условия для различных случаев закрепления кромок пластины получены из контурного интеграла вариационного уравнения. Дискретизация системы разрешающих уравнений и соответствующие им контурные условия для компьютерного моделирования изгиба прямоугольной многослойной пластины произведена методом конечных разностей. По предложенной численной методике на основе двумерной модели проведено компьютерное моделирование задачи изгиба трехслойных шарнирно-опертых симметричных по толщине квадратных пластин с ортотропными слоями из углепластика в широком диапазоне изменения.*

Ключевые слова: *слой, пластина, напряженно-деформированное состояние, дифференциальные уравнения, уточненная теория, поперечный сдвиг, давление, деформация, нормаль.*

Введение

Компьютерное моделирование позволяет заменить экспериментальное исследование физического явления вычислительным процессом – экспериментом и является одним из методов исследования сложных систем, в частности, теории пластин и оболочек. При этом в основе компьютерной модели, как правило, лежат математические уравнения и системы уравнений. Основные подходы при получении определяющих соотношений модели: аналитический подход на базе распространенных систем компьютерной программы на основе численных исследований. Следовательно, актуальным является сопоставление результатов таких исследований. Совместное использование аналитического и численного подхода позволяет рассмотреть объект с разных сторон, используя разные гипотезы, сформировать область допустимых решений.

Многослойные элементы конструкций широко применяются в авиа- и судостроении, космической промышленности, гражданском строительстве, радиоэлектронике и других отраслях промышленности. Поэтому актуальной является проблема разработки эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния многослойных элементов конструкций на основе обобщения классических теорий с применением уточненных моделей, отражающих действительную работу современных композиционных материалов [1, 4, 5, 8-10].

В настоящей работе на основе уточненной модели многослойной пластины и варианта уравнений изгиба многослойных ортотропных пластин произвольного строения с неоднородными наружными слоями и линейно-упругим материалом заполнителя построена компьютерная модель на базе пакета программ Фортран.

Предложена двумерная конечно-разностная модель многослойной пластины, на основе которой получены численные оценки параметров НДС многослойной конструкции. На примере задачи поперечного изгиба многослойной прямоугольной пластины проводится сравнение полученных моделей с известными работами

Методы и материалы исследования

Аналитическая модель

Рассмотрим прямоугольную в плане со сторонами a_1 и a_2 (рисунок 1) многослойную пластину с ортотропными слоями и толщиной $H=\delta_1+\delta_2$, состоящей из произвольного количества ортотропных слоев. Пластину отнесем к ортогональной системе координат x_1, x_2, $x_3=z$. Оси x_1 и x_2 лежат на координатной плоскости и направления их совпадают с осями ортотропии слоев. Координатную плоскость расположим произвольно по высоте сечения пластины. Расстояние от координатной плоскости до нижней и верхней поверхности пластины обозначим соответственно через δ_1 и δ_2. Нумерацию слоев производим от нижней поверхности пластины (рисунок 2). Общее количество слоев обозначим через n, тогда принимает k=1, 2, 3, …, n, где k – номер произвольного слоя. Слой, в котором расположена координатная поверхность, обозначим через m. Все слои пластины в совокупности по толщине образуют пакет слоев.

В общем случае предположим, что структуру пакета образуют слои различной толщины и жесткости, физико-механические характеристики которых постоянны по их толщине. Количество и порядок расположения слоев произвольны.

Считаем, что на границе при переходе от слоя к слою выполняются условия:

- статические

$$\sigma_{i3}^{k}=\sigma_{i3}^{k-1}, \sigma_{33}^{k}=\sigma_{33}^{k-1}, \qquad (1)$$

- кинематические

$$u_3^{k}=u_3^{k-1}, u_i^{k}=u_i^{k-1}\,(i=1,2,3), \qquad (2)$$

что соответствует работе их слоев без проскальзывания и отрыва.

Пусть на верхней площадке пластины действует нормальная нагрузка $q(x_1,x_2)$, изменяющаяся по произвольному закону, положительное направление которой совпадает с направлением нормальной оси $x_3=z$.

В основу аналитической уточненной модели напряженно-деформированного состояния многослойной пластины положена следующая система гипотез:

$$\begin{aligned}&\sigma_{33}^{k}=G_{i3}^{k}\psi_{i3}^{k}(z)\,\chi_{,i},\\&\sigma_{33}^{k}=-\sum_{i=1}^{2}\eta_{i3}^{k}(z)\,\chi_{,ii};\,(i=1,2),\\&U_3^{n}=W,\end{aligned} \qquad (3)$$

где W и χ – искомые функции прогиба и сдвига координатной поверхности, для которой координата $z=0$. G_{i3}^{k} – модуль сдвига k-го слоя пластины, остальные компоненты – есть функции распределения, зависящие от поперечной координаты z.

Приведенные выражения получены на основе гипотез, предложенных А.Ш. Боженовым, путем их существенного упрощения из-за допущений, которые позволили пренебречь рядом факторов, несущественно влияющих на напряженно-деформированное состояние (НДС) пластин.

На основе принятых гипотез строится линейная геометрическая модель многослойной пластины и устанавливается связь между напряжениями и деформациями [1, 3].

Построенная модель является двумерной, но описывает трехмерный закон изменения НДС многослойных пластин.

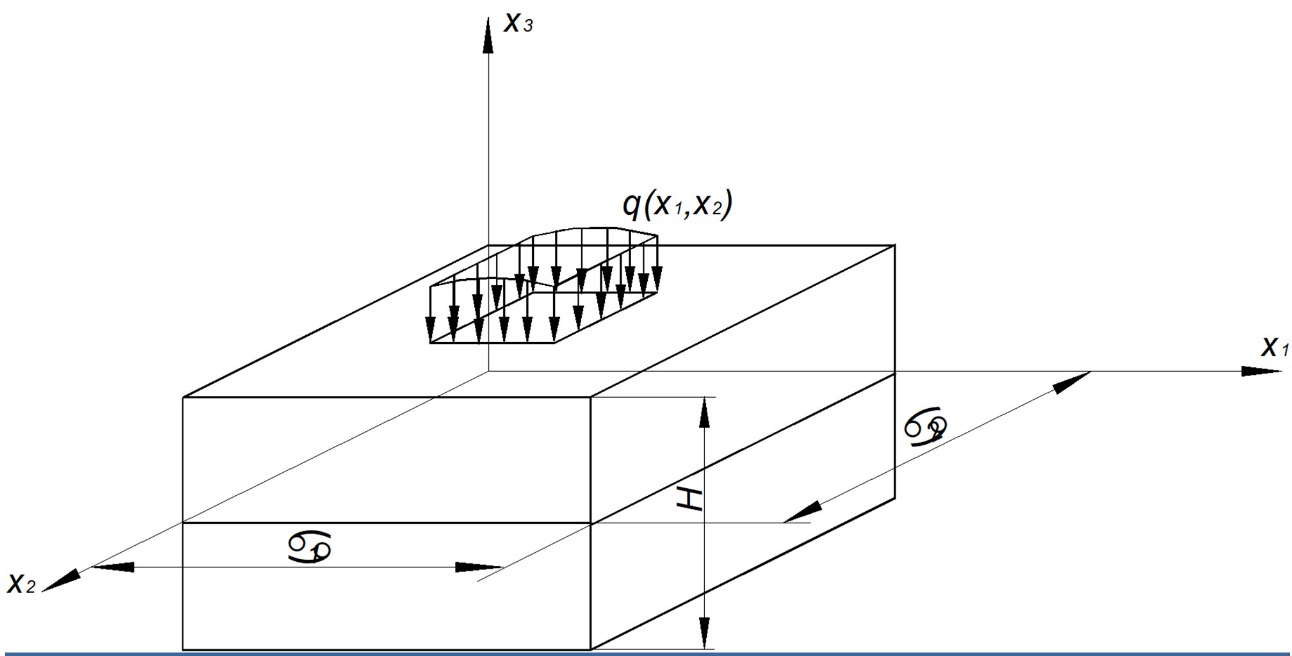

Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

Из вариационного принципа Лагранжа выведены уравнения изгиба многослойных пластин несимметричной структуры по толщине с ортотропными слоями и соответствующие им граничные условия в усилиях. В результате получена система трех уравнений 12-го порядка, которая описывает изгиб многослойной пластины [1, 3, 4].

$$\begin{aligned} &\Delta_2^F \phi + \Delta_{1S}^2 W - (\Delta_{2S}^2 - \Delta_{13}^2)\chi = 0; \\ &\Delta_{1S}^2 \phi + (\Delta_{3S}^2 - \Delta_D^2) W + (\Delta_P^2 - \Delta_{23}^2 - \Delta_{4S}^2)\chi = -q; \\ &\Delta_{2S}^2 \phi + (\Delta_{5S}^2 - \Delta_p^2) W + (\Delta_{P1}^2 - \Delta_{33}^2 - \Delta_{p3})\chi = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Система учитывает поперечный сдвиг и давление слоев. Неизвестными являются три функции координатной поверхности: функция усилий, прогиба и сдвига. Уравнения (4) содержат дифференциальные операторы 4-го и 2-го порядков, которые определяются по (5) с коэффициентами, соответственно $A_j^*(j=1,2,3)$, $B_i^*(i=1,2)$, зависящими от жесткостей многослойной пластины.

$$\begin{aligned} &\Delta_f^2 = A_1^*(\_)_{,1111} + A_2^*(\_)_{,1122} + A_3^*(\_)_{,2222}; \\ &\Delta_g = B_1^*(\_)_{,11} + B_2^*(\_)_{,22}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для разных значений f и g коэффициенты операторов принимают различные значения.

Граничные условия делятся на две группы [1, 2].

Разработана прикладная методика численного исследования напряженно-деформированного состояния многослойных пластин на основе метода сеток [2, 3-5].

Полученные уравнения изгиба многослойных ортотропных пластин несимметричной структуры по толщине в смешанной форме (4) и соответствующие им контурные условия представлены в конечно-разностной форме для произвольного узла прямоугольной сетки (рисунок 2).

Структурное формирование основных матриц метода конечных разностей.

Исследуемая прямоугольная пластина покрывается прямоугольной сеткой (рисунок 2). Система разрешающих уравнений (4) записывается для всех внутриконтурных узлов прямоугольной сеточной области пластины, в результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно дискретных значений неизвестных функций ϕ, W, χ.

Первое уравнение для точки i в конечных разностях примет вид:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^1\phi_i + \alpha_2^1(\phi_k+\phi_l) + \alpha_3^1(\phi_m+\phi_n) + \alpha_4^1(\phi_q+\phi_p+ \\ &+\phi_o+\phi_r) + \alpha_5^1(\phi_u+\phi_v) + \beta_1^1(W_i) + \beta_2^1(W_k+W_e) + \\ &+\beta_3^1(W_m+W_n) + \beta_4^1(W_q+W_p+W_o+W_r) + \beta_5^1\times \\ &\times(W_s+W_t) + \beta_6^1(W_u+W_n) + \gamma_1^1\chi_i + \gamma_2^1(\chi_k+\chi_e) + \\ &+\gamma_3^1(\chi_m+\chi_n) + \gamma_4^1(\chi_q+\chi_p+\chi_o+\chi_r) + \\ &+\gamma_5^1(\chi_s+\chi_t) + \gamma_6^1(\chi_u+\chi_t) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\alpha_t^1, \beta_t^1, \gamma_t^1\,(t=1...6)$ – коэффициенты соответственно при функциях усилий, прогиба и сдвига и определяются следующими соотношениями:

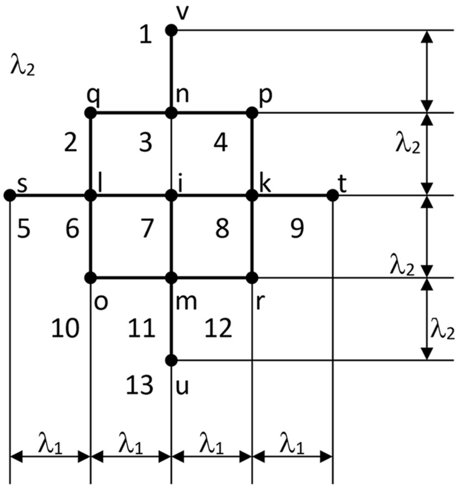

Рисунок 2 – Локальная сетка

$$\begin{aligned} &\alpha_1^1 = 4(F_4+2F_2) + 6F_1/\mu^2 + 6F_3\mu^2; \\ &\alpha_2^1 = -4F_1/\mu^2 - 2(F_4-2F_2);\;\; \alpha_3^1 = -4F_3 - 2(F_4-2F_2); \\ &\alpha_4^1 = F_4 - 2F_2;\;\; \alpha_5^1 = F_1/\mu^2;\;\; \alpha_6^1 = F_3\mu^2; \\ &\beta_1^1 = 4(R_2+R_3-R_5) + 6R_1/\mu^2 + 6R_4\mu^2; \\ &\beta_2^1 = -4R_1/\mu^2 - 2(R_2+R_3-R_5); \\ &\beta_3^1 = -4R_4\mu^2 - 2(R_2+R_3-R_5); \\ &\beta_4^1 = (R_2+R_3-R_5);\;\; \beta_5^1 = -R_1/\mu^2;\;\; \beta_6^1 = -R_4/\mu; \\ &\gamma_1^1 = 4(H_2-J_2-J_3+J_5) + 6(H_3-J_4)\mu^2; \\ &\gamma_2^1 = -4(H_1-J_1)/\mu^2 - 2(H_2-J_2-J_3+J_5); \\ &\gamma_3^1 = -4H_3\mu^2 - 2(H_2-J_2-J_3+J_5); \\ &\gamma_4^1 = (H_3-J_2-J_3+J_5); \\ &\gamma_5^1 = (H_1-J_1)/\mu^2;\;\; \gamma_6^1 = (H_3-J_4)/\mu^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Аналогично получим выражение в конечных разностях для второго и третьего уравнений из (4). Порядок алгебраических уравнений равен $3N$, где N – количество внутренних узлов. Величина N зависит от числа делений S сторон пластины шагами принятой сетки и определяется выражением

$$N = (S-1)^2. \tag{8}$$

Система алгебраических уравнений (6) может быть представлена в матричной форме в следующем виде:

$$A\vec{X} = \vec{Q}, \tag{9}$$

где A – квадратная матрица, имеющая общую размерность $3N$, ее элементами являются переменные коэффициенты $\alpha_t^j, \beta_t^j, \gamma_t^j\,(j=1,3; t=1...6)$, которые вычисляются по формулам (7).

$\vec{X}$ – вектор искомых значений функций усилий, прогиба и сдвига во внутриконтурных узлах сеточной области; $\vec{Q}$ – вектор грузовых членов, зависящий от характера и величины внешней нагрузки.

При делении сторон пластины на S равных частей матрицу A можно представить из девяти блоков. Каждый блок является квадратной подматрицей. Порядок их одинаков и равен $S-1$.

$$A = \begin{matrix} R_1^1 & R_4^1 & R_7^1 \\ R_2^2 & R_5^2 & R_8^2 \\ R_3^3 & R_6^3 & R_9^3 \end{matrix}. \qquad (10)$$

Блоки 1, 4, 7 в верхней строке составлены из коэффициентов $\alpha_t^1, \beta_t^1, \gamma_t^1 \, (t = 1 \div 6)$ первого уравнения (4) и (6) соответственно при искомых значениях функции усилий, прогиба и сдвига.

Аналогично составлены блоки 2, 5, 8 из коэффициентов $\alpha_t^2, \beta_t^2, \gamma_t^2 \, (t = 1 \div 6)$ второго уравнения из (4) и блоки 3, 6, 9 – из коэффициентов $\alpha_t^3, \beta_t^3, \gamma_t^3 \, (t = 1 \div 6)$ третьего уравнения из (4).

Все девять блоков имеют идентичную структуру расположения элементов. Поэтому подробно рассмотрим один из них, например первый блок R_1^1.

$R_1^1 =$

A_1	A_2	A_3		
A_2	A_4	A_2	A_3	
A_3	A_2	A_4	A_2	A_3
	A_3	A_2	A_4	A_2
		A_3	A_2	A_5

Рисунок 3 – Структура матрицы R_1^1 при S = 6

Блоки $R_2^2, R_3^3, R_4^1, R_5^2, R_6^3, R_7^1, R_8^2, R_9^3$ матрицы A можно получить из блока R_1^1 заменой элементов: α_1^1 соответственно на $\alpha_1^2, \alpha_1^3, \beta_1^1, \beta_1^2, \beta_1^3, \gamma_1^1, \gamma_1^2, \gamma_1^3$; α_2^1 соответственно $\alpha_2^2, \alpha_2^3, \beta_2^1, \beta_2^2, \beta_2^3, \gamma_2^1, \gamma_2^2, \gamma_2^3$; α_3^1 соответственно на $\alpha_3^2, \alpha_3^3, \beta_3^1, \beta_3^2, \beta_3^3, \gamma_3^1, \gamma_3^2, \gamma_3^3$ и т.д.

Вектор $\vec{X}$ в выражении (9) представлен в виде:

$$\vec{X} = \begin{vmatrix} \vec{\phi} \\ \vec{W} \\ \vec{\chi} \end{vmatrix}, \qquad (11)$$

где $$\vec{\phi} = \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \dots \\ \phi_N \end{vmatrix}; \quad \vec{W} = \begin{vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \dots \\ W_N \end{vmatrix}; \quad \vec{\chi} = \begin{vmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \dots \\ \chi_N \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Здесь $\phi_i, W_i, \chi_i \, (i = 1 \dots N)$ – искомые значения соответственно функций усилий, прогиба и сдвига, определяемые в i-й узловой точке сеточной области, аппроксимирующую поверхность пластины.

Вектор внешней нагрузки:

$$\vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{Q}_0 \\ \vec{Q}_q \\ Q_0 \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

где $\vec{Q}_0$ – нулевой вектор размерности N; $\vec{Q}_q$ – вектор узловой нагрузки размерности N. Он имеет вид:

$$\vec{Q}_q = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dots \\ q_N \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Здесь $q_i \, (i = 1 \dots N)$ – значение внешней нагрузки в i-й сеточной точке.

Для формирования общей матрицы A необходимо предварительно сформировать ряд промежуточных матриц [2, 3-5]:

- матрицу жесткостных характеристик – *Д*,
- матрицу граничных условий,
- сжатые матрицы коэффициентов разрешающей системы уравнений.

Матрица жесткостных характеристик представляет собой матрицу *размерностью* 12х3. Формирование ее производится по разработанной программе VFGMO.

На основе метода конечных разностей разработан общий алгоритм численного расчета НДС многослойной пластины с ортотропными слоями несимметричной структуры по толщине, включающий следующие основные вычислительные модули:

- расчет приведенных жесткостных характеристик многослойной пластины;
- формирование и решение системы разрешающих уравнений равновесия;
- расчет напряженно-деформированного состояния многослойной ортотропной пластины.

Представленный алгоритм реализован на ПЭВМ в виде пакета программ, написанных на языке Фортран. Для основных подпрограмм изложена краткая характеристика [2, 3, 4].

Заключение

Разработанная численная методика расчёта изгиба многослойных ортотропных пластин произвольной структуры по толщине и методика компьютерного моделирования, основанная на МКР, реализована на ПЭВМ, обладает высокой степенью универсальности и позволяет решать широкий круг задач при варьировании различных краевых условий, геометрических размеров пластины в плане внешней нагрузки, толщин слоёв, их упругих характеристик и учёта тех или иных факторов высшего порядка.

В настоящей работе на основе двумерной модели [1, 2-5]: по предложенной численной методике проведено компьютерное моделирование задачи изгиба трехслойных шарнирно-опертых симметричных по толщине квадратных пластин с ортотропными слоями из углепластика в широком диапазоне изменения h/a:

$$E_1 = 25E_2;\ E_2 = E_3;\ G_{12} = G_{13} = 0,5E_2;$$

$$V_{12} = V_{23} = V_{13} = V_{32} = 0,25;\ V_{21} = V_{31} = 0,01;$$

$$G_{23} = 0,2E_2;\ V_{23} = V_{13} = 0;\ h_3 = h_1 = 0,5h;\ h_2 = 0,25h.$$

В таблице представлены значения прогибов и растягивающих напряжений (σ_{11} – в наружном волокне нижнего слоя, σ_{22} – на границе внешнего и внутреннего слоев и принадлежит наружной фибре нижнего слоя) в центре пластины, сопоставлены результатами известных решений.

Сопоставление полученных результатов по предложенной численной методике с трехмерным решением во всем диапазоне рассматриваемых параметров a/h показывает достаточную точность. Классическая теория для рассматриваемых задач не применима.

h/a	Классическая теория	Точное решение		Решение в тригонометрических рядах		МКР	
	10^{-7}w, м	10^{-7}w, м	$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}$, мПа	10^{-7}w, м	$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}$, мПа	10^{-7}w, м	$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}$, мПа
1/20	690,00	820,41	$\frac{217,20}{123,48}$	821,51	$\frac{217,44}{123,48}$	840,56	$\frac{209,08}{118,23}$
1/10	43,12	73,70	$\frac{55,90}{10,40}$	73,93	$\frac{56,22}{40,26}$	75,85	$\frac{53,95}{38,46}$
1/5	2,70	-	-	9,25	$\frac{16,59}{15,01}$	9,56	$\frac{15,26}{14,85}$
1/4	1,10	4,96	$\frac{11,52}{10,61}$	5,00	$\frac{11,97}{10,96}$	5,21	$\frac{11,48}{10,19}$
1/2	0,07	0,81	$\frac{5,55}{3,34}$	0,80	$\frac{5,57}{3,39}$	0,85	$\frac{5,39}{3,28}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боженов А.Ш. Теория многослойных неоднородных пластин, ортотропных оболочек и пластин: Дис. … д-ра техн. наук / НИИЖТ. – Новосибирск, 1990. – 45 с.
2. Боженов А.Ш., и др. Алгоритм формирования системы уравнения сложных оболочек. Деп. в КазНИИНТИ. 11.10.1985, № 1072 – К85.
3. Касимов А.Т. Исследования НДС прямоугольных многослойных пластин методом конечных разностей // Труды университета. Караганда: КарГТУ, 2002. Вып. 4.
4. Касимов А.Т., Кожас А.К., Пчельникова Ю.Н., Касимов Б.А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния слоистых пластинчатых конструкций на основе уточненной теории // Труды университета. Караганда: КарГТУ, 2012. Вып. 4.
5. Касимов А.Т., Есенбаева Г.А., Касимов Б.А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния трёхслойных пластин на основе неклассической теории изгиба // Труды университета. Караганда: КарГТУ, 2020. № 1.
6. Карасев С.Н. Задача изгиба прямоугольной ортотропной многослойной пластины. Деп. в ВИНИТИ 4.08.80. Казань, 1980. С. 6.
7. Караш И.Т. Напряженно-деформированное состояние многослойного плоского кривого бруса при изгибе с учетом идеального и неидеального контакта между слоями / С.М. Верещака, И.Т. Караш // Вiсник Сумського державного унiверситету. Серiя «Технiчнi науки». – 2012. – № 3. – С. 105-120.
8. Karash E.T. The Experimental Model of the Pipe of a Composite Material Underthe Effect of Internal Pressure / E.T. Karash, S.M. Vershchaka, D.A. Zhigiliy // International Journal of Science and Engineering Investigations. – June 2012. – Volume 1. – Issue 5. – ISSN: 2251-8843. – Pp. 1-4.
9. Карнаухов В.Г. Влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезоактуаторов при активном демпфировании колебаний прямоугольной пластины / В.Г. Карнаухов, В.И. Козлов, Т.В. Карнаухова // Доповiдi Нацiональної академiї наук України. 2015. № 2. – С. 50-54.
10. Кудин, А.В. Применение метода малого параметра при моделировании изгиба симметричных трёхслойных пластин с нелинейно-упругим заполнителем / А.В. Кудин, Ю.Н. Тамуров // Вiсник Схiдно українського нацiонального унiверситету iменi Володимира Даля. – 2011. – № 11. (165). – С. 32-40.
11. Гоменюк, С.И. Дискретизация трехмерных областей, данных R функциями, на шестигранные конечные элементы / С.И. Гоменюк, С.В. Чопоров // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2011. № 3 (42). – С. 146-153.

Көпқабатты тікбұрышты табақшалардың иілуін сандық әдіс арқылы компьютерлік модельдеу

[1]*КАСИМОВ Абай Тусупбекұлы, *т.ғ.к., доцент, kasimov5301@mail.ru,*
[2]ЕСЕНБАЕВА Гульсима Ахмедияқызы, *ф.-м.ғ.к., профессор, esenbaevagulsima@mail.ru,*
[1]ЖОЛМАҒАМБЕТОВ Сырлыбек Рысбекович, *т.ғ.к., syrlybekzh@mail.ru,*
[2]КАСИМОВ Бауыржан Абайұлы, *магистрант, baurrito@mail.ru,*
[1]ҚАСЫМОВ Айдос Абайұлы, *магистрант, gavslic@gmail.com,*
[1]«Әбілқас Сағынов атындағы Қарағанды техникалық университеті» КеАҚ, Қазақстан, Қарағанды, Н. Назарбаев даңғылы, 56,
[2]«Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті» КеАҚ, Қазақстан, Қарағанды, Университет көшесі, 28,
**автор-корреспондент.*

Аңдатпа. *Көпқабатты табақшалардың иілуін компьютерлік сандық модельдеу және талдау, қабатты пластиналардың дәлірек теориясының бір варианттарының дифференциалды теңдеулері негізінде жүргізіледі, онда көлденең ығысу, бір-біріне қабаттардың қысымы, нормаль деформациясы, қабаттардың ортотропиясы, құрылымның асимметриясы ескеріледі. Жүйенің жалпы дәрежесі 12-ге тең. Координаттық беттің үш функциясы белгісіз: күш, жылжу және ығысу функциясы. Пластина жиектерін бекітудің әртүрлі жағдайлары үшін, шекті жағдайлар вариациялық теңдеудің контурлық интегралынан алынған. Көпқабатты табақшалардың иілуін компьютерлік модельдеуді атқару үшін, қолданылатын шешім беретін теңдеулер жүйесін дискретизациялау және оларға сәйкес контурлық жағдайлар, шеткі айырма әдісіарқылы жасалған. Екі өлшемді модельге негізделе, ұсынылған сандық әдістеме арқылы кеңейтілген диапазонында, шеттері шарнирлі бекітілген, қалыңдық қабаттары симметриялы, ортотропты көміртекті талшықтардан тұрған, үш қабатты квадрат табақшалардың иілу есептеріне, компьютерлік модельдеу жүргізілді.*

Кілт сөздер: *қабат, пластина, кернеулі-деформацияланған күй, дифференциалды теңдеулер, нақтыланған теория, көлденең ығысу, қысым, деформация, нормаль.*

Computer Simulation of Bending of a Rectangular Multi-Layered Plate Using a Numerical Approach

[1]*KASSIMOV Abay, *Cand. of Tech. Sci., Associate Professor, kasimov5301@mail.ru,*
[2]ESSENBAYEVA Gulsima, *Cand. of Phys. and Math. Sci., Professor, esenbaevagulsima@mail.ru,*
[1]ZHOLMAGAMBETOV Syrlybek, *Cand. of Tech. Sci., syrlybekzh@mail.ru,*
[2]KASSIMOV Bauyrzhan, *Master Student, baurrito@mail.ru,*
[1]KASSYMOV Aidos, *Master Student, gavslic@gmail.com,*
[1]NPJSC «Abylkas Saginov Karaganda Technical University», Kazakhstan, Karaganda, N. Nazarbayev Avenue, 56,
[2]NCJSC «Karaganda Buketov University», Kazakhstan, Karaganda, University Street, 28,
**corresponding author.*

Abstract. *Computer simulation of the bending of a rectangular multilayer plate using a numerical approach is carried out on the basis of differential equations of a variant of the refined theory of multilayer plates, which take into account: transverse shear, pressure of layers against each other, normal deformations, layer orthotropy, asymmetry of the structure. The general order of the system is 12. Three functions of the coordinate surface are unknown: the function of effort, deflection, and shear. The boundary conditions for various cases of fixing the edges of the plate are obtained from the contour integral of the variational equation. Discretization of the system of resolving equations and the corresponding contour conditions for a computer simulation of the bending of a rectangular multilayer plate was performed by the finite difference method. According to the proposed numerical technique on the basis of a two-dimensional model, computer simulation of the problem of bending three-layer articulated support symmetrical in thickness square plates with orthotropic carbon fiber layers in a wide range of changes was carried out.*

Keywords: *layer, plate, stress-strain state, differential equations, refined theory, transverse shear, pressure, deformation, normal.*

REFERENCES

1. Bozhenov A.Sh. Teoriya mnogosloynykh neodnorodnykh plastin, ortotropnykh obolochek i plastin [Theory of multilayer inhomogeneous plates, orthotropic shells and plates]: Dis. … d-ra tekhn. nauk / NIIZhT. – Novosibirsk, 1990. – 45 p.
2. Bozhenov A.Sh., i dr. Algoritm formirovaniya sistemy uravneniya slozhnykh obolochek [Algorithmforming the equation system of complex shells]. Dep. v KazNIINTI. 11.10.1985, no. 1072 – K85.
3. Kasimov A.T. Issledovaniya NDS pryamougolnykh mnogosloynykh plastin metodom konechnykh raznostey [Studies of the VAT of rectangular multilayer plates by the finite difference method] // Trudy universiteta. Karaganda: KarGTU, 2002. Vyp. 4.
4. Kasimov A.T., Kozhas A.K., Pchelnikova Yu.N., Kasimov B.A. Chislennoye modelirovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sloistykh plastinchatykh konstruktsiy na osnove utochnennoy teorii [Numerical simulation of the stress-strain state of layered plate structures based on the refined theory] // Trudy universiteta. Karaganda: KarGTU, 2012. Vyp. 4.
5. Kasimov A.T., Yesenbayeva G.A., Kasimov B.A. Chislennoye modelirovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya trekhsloynykh plastin na osnove neklassicheskoy teorii izgiba [Numerical simulation of the stress-strain state of three-layer plates based on non-classical bending theory] // Trudy universiteta. Karaganda: KarGTU, 2020. No. 1.
6. Karasev S.N. Zadacha izgiba pryamougolnoy ortotropnoy mnogo-sloynoy plastiny [The problem of bending a rectangular orthotropic multilayer plate]. Dep. v VINITI 4.08.80. Kazan, 1980. P. 6.
7. Karash I.T. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye mnogosloynogo ploskogo krivogo brusa pri izgibe s uchetom idealnogo i neidealnogo kontakta mezhdu sloyami [Stress-strain state of a multilayer flat curved beam when bending, taking into account ideal and non-ideal contact between layers] / S.M. Vereshchaka, I.T. Karash // Visnik Sumskogo derzhavnogouniversitetu. Seriya «Tekhnichni nauki». – 2012. – No. 3. – Pp. 105-120.
8. Karash E.T. The Experimental Model of the Pipe of a Composite Material Underthe Effect of Internal Pressure / E.T. Karash, S.M. Vershchaka, D.A. Zhigiliy // International Journal of Science and Engineering Investigations. – June 2012. – Volume 1. – Issue 5. – ISSN: 2251-8843. – Pp. 1-4.
9. Karnaukhov V.G. Vliyaniye deformatsiy sdviga na effektivnost raboty pyezoaktuatorov pri aktivnom dempfirovanii kolebaniy pryamougolnoy plastiny [The effect of shear deformations on the efficiency of piezoactuators with active damping of rectangular plate vibrations] / V.G. Karnaukhov, V.I. Kozlov, T.V. Karnaukhova // Dopovidi Natsionalnoï akademiï nauk Ukraïni. 2015. No. 2. – Pp. 50-54.
10. Kudin, A.V. Primeneniye metoda malogo parametra pri modelirovanii izgiba simmetrichnykh trekhsloynykh plastin s nelineyno-uprugim zapolnitelem [Application of the small parameter method in modeling the bending of symmetrical three-layer plates with a nonlinear elastic filler] / A.V. Kudin, Yu.N. Tamurov // Visnik Skhidno ukraïnskogo natsionalnogo universitetu imeni Volodimira Dalya. – 2011. – No. 11. (165). – Pp. 32-40.
11. Gomenyuk, S.I. Diskretizatsiya trekhmernykh oblastey, dannykh R funktsiyami, na shestigrannyye konechnyye elementy [Дискретизация трехмерных областей, данных R функциями, на шестигранные конечные элементы] / S.I. Gomenyuk, S.V. Choporov // Vestnik Khersonskogo natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta. – 2011. No. 3 (42). – Pp. 146-153.