DOI 10.52209/1609-1825_2023_1_430 УДК 47.45.03

Алгоритм совмещенной постановки обратной задачи определения проводимости в околоскважинном пространстве

[1]*ШАХАТОВА Алия Талгатовна, докторант, shakhatovaa@list.ru,
[1]МИРҒАЛИҚЫЗЫ Толқын, PhD, доцент, m_t85@mail.ru,
[1]НАО «Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева», Казахстан, Астана, ул. Сатпаева, 2,
*автор-корреспондент.

Аннотация. *Рассматривается обратная задача по определению проводимости в околоскважинном пространстве. Сформулирована совмещенная постановка рассматриваемых прямых и обратных задач, записанных в цилиндрической системе координат. Рассмотрены два метода электроразведки: высокочастотное зондирование и метод переходных процессов. Используя информацию от обоих методов, введена совмещенная постановка обратной задачи. Для численного решения этой задачи применен оптимизационный метод. Суть этого метода состоит в минимизации взвешенной суммы квадратичного функционала невязки наблюдаемого и рассчитанных полей метода высокочастотного зондирования и метода переходных процессов. Для численного решения построены согласованные разностные схемы решения прямой и обратной задачи электроразведки в совмещенной постановке.*

Ключевые слова: *околоскважинное пространство, скважина, электромагнитное поле, цилиндрическская система координат, алгоритмы обратной задачи, оптимизационный метод, функционал.*

Введение

В настоящее время электромагнитный каротаж занимает важное место в общем комплексе геофизических методов исследования скважин.

Источник и приемник электромагнитного поля помещены в скважину и разнесены вдоль скважины на некоторое расстояние (длина зонда). Перемещая зонд вдоль скважины, измеряют электромагнитное поле и получают зависимость наблюдаемой величины от положения зонда относительно среды.

Поэтому электромагнитное поле, возбуждаемое и измеряемое в скважине, содержит информацию не только о части среды, расположенной против зонда и примыкающей к скважине, но и об электрической структуре исследуемого объема горных пород.

Математически такая модель может быть сформирована как граничная задача во всем пространстве для системы уравнений Максвелла с переменными разрывными коэффициентами [1].

Каротажный зонд состоит из системы генераторных и приемных катушек. Генераторные катушки питаются переменным током заданной частоты. Будем считать, что ось скважины – прямая линия. Ось катушек совпадает с этой линией, а их витки – окружности, центр которых лежит на оси скважины. Поэтому при рассмотрении прямых задач теории электромагнитного каротажа в качестве источника возбуждения электромагнитного поля обычно выбирают диполь, расположенный на оси скважины. В дальнейшем предполагается, что источник электромагнитного поля обладает осевой симметрией.

При этом обычно скважину считают цилиндрическим телом с круговым сечением. Эта модель является одномерной, электромагнитные параметры которой – кусочно-постоянные функции координаты r цилиндрической системы.

Поэтому в теории электромагнитного каротажа довольно часто рассматривается модель плоскопараллельной горизонтально однородной слоистой среды, электромагнитные свойства которой меняются только вдоль оси скважины (предполагается, что образующая скважины перпендикулярна к плоскости раздела слоев). Эта модель также является одномерной; электромагнитные параметры ее – функции одной координаты r (цилиндрической системы координат). Наиболее исследованной моделью этого класса можно считать пласт конечной мощности, заключенный между двумя однородными пространствами. Эта модель дает возможность оценивать влияние вмещающих пород, электромагнитных параметров и мощности пласта. Более общей является модель слоистой среды, представляющей собой слой конечной мощности, электромагнитные параметры которого – кусочно-дифференцируемые функции координаты z. Этот слой также заключен между двумя однородными пространствами с различными электромагнитными параметрами. Модель позволяет оценить влияние изменений электромагнитных свойств среды, пересекаемых скважиной. Исследование этих изменений и является целью электромагнитного каротажа.

В случае линейного источника система уравнения Максвелла редуцирована к краевой задаче для уравнения второго порядка гиперболического типа (в цилиндрических координатах (r, φ, z) относительно соответствующей источнику компоненты электрического поля.

В данной статье рассматривается постановка прямых и обратных задач для уравнения геоэлектрики во временной области и квазистационарном приближении. Рассматриваются следующие постановки обратных задач: определение ε – диэлектрической проницаемости, σ – проводимости среды и задача об одновременном их определении. Для решения обратной задачи, сформулированной на дифференциальном уровне, используется оптимизационный метод. Суть этого метода сводится к минимизации квадратичного функционала невязки наблюдаемых и расчетных компонент поля E_2, вычисленного в некоторой фиксированной точке. Выведены градиенты функционалов и построены соответствующие им сопряженные задачи. Для численной реализации построены согласованно-сопряженные разностные схемы решения прямой и сопряженных задач для дискретного оптимизационного метода по определению проводимости сред в волновом случае, и определение проводимости в квазистационарном приближении.

Постановки обратной задачи в случае линейного источника

Рассмотрим волновую постановку прямой задачи, а именно: в области $Q=[0,R]\times[0,T]$, определим функцию $v(r,t)$ из соотношений [1]:

$$\varepsilon v_{tt}+\sigma v_t=\frac{1}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)-g(r,t), \quad (1)$$
$$0<t\le T_1,\quad 0<r<R_1,$$

$$v\,|_{t=0}=0,\quad v_t\,|_{t=0}=\frac{1}{\varepsilon}\eta q(0), \quad (2)$$

$$v_r\,|_{r=0}=0,\quad v\,|_{r=R}=0. \quad (3)$$

Пусть относительно решения прямой задачи (1)-(3) известна дополнительная информация:

$$v(0,t;\varepsilon)=f_1(t). \quad (4)$$

Обратная задача 1: по известной дополнительной информации (4) найти $\sigma(r)$ и $\nu(r,t;\sigma)$ из соотношений (1)-(3), полагая, что известны ε, μ, g.

Пусть $p(r)$ – приближенное решение обратной задачи 1. Введем в рассмотрение квадратичный функционал:

$$J_1(p)=\int_0^{T_1}[v(0,t;p)-f_1(t)^2dt. \quad (5)$$

Минимизируем функционал (5) методом наискорейшего спуска. Пусть известно приближение $p^{(n)}(r)$, последующее приближение определим из

$$p^{(n+1)}(r)=p^{(n)}(r)-\alpha\nabla J_1(p^{(n)}). \quad (6)$$

Здесь α_n – коэффициент спуска, который можно определить, как в [2], а $\nabla J(p^{(n)})$ – градиент функционала.

Для вывода градиента функционала для обратной задачи 1 зададим приращение $p+\delta p$, тогда:

$$\delta v(r,t)=v(r,t;p+\delta p)-v\{r,t;p\}.$$

Вычислим приращение функционала:

$$\nabla J_1(p)=J_1(p+\delta p)-J_1(p)=$$
$$=\int_0^{T_1}[v(0,t;p+\delta p)-f_1(t)]^2dt-[v(0,t;p)-f_1(t)]^2dt.$$

После преобразований, аналогичных в работе [3], получим, что градиент функционала (5) имеет вид:

$$\nabla J_1(p)=\int_0^{T_1}(v_1(r,t)\varphi(r,t)^2dt), \quad (7)$$

где $\nabla J_1(p)$ – есть решение вспомогательной задачи, полученное в процессе вывода формулы для вычисления градиента, и имеет вид:

$$\varepsilon(r)\varphi_{tt}-p(r)\varphi_t=\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\varphi\right),\quad (r,t)\in Q. \quad (8)$$

Данная задача (8) является сопряженной.

$$\varphi(r,T_1)=0,\quad \varphi_t\,|_{t=T_1}=0,\quad 0\le r\le R_1, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\varphi\,|_{r=0}=2[v(0,t,p)-f_1(t)],\quad 0\le t\le T_1, \quad (10)$$

$$\varphi(R_1,t)=0,\quad 0<t\le T_1. \quad (11)$$

Таким образом алгоритм решения обратной задачи 1 выглядит следующим образом:

1. Задаем начальное приближение $p^{(0)}(r)$, и решаем прямую задачу (1)-(3), получим $\nu^{(0)}(r,t;p^{(0)})$.
2. Вычислим краевое значение (10) и решаем сопряженную задачу (8)-(11), получим $\varphi^{(0)}(r,t;p^{(0)})$.
3. Вычислим градиент по формуле (7), т.е. находим $\nabla J_1(p^{(0)}(r))$.
4. Вычислим очередное приближение $p^{(n+1)}(r)$ по формуле (6).
5. Проверим значение функционала (5), если он достиг минимума, то переход к пункту 6, если нет, то полагаем $p^{(0)}(r)=p^{(n)}(r)$ и возврат к пункту 1.
6. Полагаем приближение $p^{(n)}(r)$ – за приближенное решение обратной задачи 1.

Квазистационарное приближение

Рассмотрим постановку прямой задачи в квазитационарном приближении. Такая постановка задачи возникает из системы уравнений Максвелла, если пренебречь токами смещения.

В области $Q_2=[0,R_2]\times\mu[0,T_2]$ определить функцию $u(r,t)$ из соотношений:

$$\sigma u_{tt}=\frac{1}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)-q(r,t),\,0<t<T_2,\,0<r<R_2,\quad(12)$$

$$u\,|_{\,t=0}=0,\quad(13)$$

$$u_r\,|_{\,r=0}=0,\quad u\,|_{\,r=R_2}=0.\quad(14)$$

Пусть относительно решения прямой задачи (12)-(14) известна дополнительная информация:

$$u(0,t;\sigma)=f_2(t).\quad(15)$$

Обратная задача 2: по известной дополнительной информации (15) найти $\sigma(r)$ и $u(r,t;\sigma)$ из соотношений (12)-(14), полагая, что функция $q(r,t)$ известна.

Пусть $b(r)$ – приближенное решение обратной задачи 2, введем в рассмотрение квадратичный функционал:

$$J_2(b)=\int_0^{T_2}[u(0,t;b)-f_2(t)]dt.\quad(16)$$

Минимизируем функционал (16) методом наискорейшего спуска [2]. Пусть известно $b^{(n)}(r)$, последующее приближение определений как:

$$b^{(n+1)}(r)=b^{(n)}(r)-\alpha_n\nabla J_2(b^{(n)}),\quad(17)$$

где α_n – коэффициент спуска, $\nabla J_2(b^{(n)})$ – градиент функционала (16).

Повторяя аналогичные выкладки при выводе градиентного функционала, как в работе [4], окончательно имеем, что:

$$\nabla J_2(b(r))=\int_0^{T_2}u_t(r,t)\psi(r,t)\,dt,\quad(18)$$

здесь $\psi(r,t)$ – коэффициент сопряженной задачи.

$$b(r)\psi=\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right),\quad(19)$$

$$\psi(r,T_2)=0,\quad \psi_t(r,t)\,|_{\,t=T_2}=0,\quad 0\le r\le R_2,\quad(20)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi\,|_{\,r=0}=2[u(0,t;b)-f_2(t)],\quad 0<t\le T_2,\quad(21)$$

$$\psi(R_2,t)=0,\quad 0<t\le T_2.\quad(22)$$

Алгоритм решения обратной задачи 2 состоит в следующем:

1. Задаем начальное приближение $b^{(0)}(r)$ и решаем прямую задачу (12)-(14), получим $u^{(0)}(r,t;b^{(0)})$.
2. Вычислив краевое условие (21), решим сопряженную задачу, получим $\psi^{(0)}(\sigma,t;b^{(0)})$.
3. Вычислим градиент функционала по формуле (18), находим $\nabla J_2(b^{(0)})$.
4. Вычислим приближение $b^{(n+1)}(r)$ по формуле (17).
5. Проверим значение функционала, если он достиг min, то переход к пункту 6: если нет, то полагаем, $b^{(0)}(r)=b^{(n)}(r)$ и переход к п.1.
6. Полагаем $b^{(n)}(r)$ за приближенное решение задачи 2.

Совмещённая постановка обратной задачи

Рассмотрим совмещенную постановку по аналогии работе [4]:

$$\varepsilon v_{tt}+\sigma v_t=\frac{1}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\,0<t\le T_1,\,0<r<R_1,\quad(23)$$

$$v\,|_{\,t=0}=0,\quad v_t\,|_{\,t=0}=\frac{1}{\varepsilon}\eta q(0),\quad(24)$$

$$v_r\,|_{\,t=0}=V_1(t),\quad v\,|_{\,r=R}=0,\quad(25)$$

$$v(0,t;\varepsilon)=f_1(t),\quad(26)$$

$$\sigma v_1=\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right),\quad 0<t\le T_2,\quad(27)$$

$$v\,|_{\,t=0}=0,\quad v_t\,|_{\,t=0}=\frac{1}{\varepsilon}\eta q(0),\quad(28)$$

$$v_r\,|_{\,t=0}=V_2(t),\quad v\,|_{\,r=R}=0,\quad(29)$$

$$v(0,t;\varepsilon)=f_2(t).\quad(30)$$

Требуется по функциям $V_1(t)$, $V_2(t)$, и $f_1(t)$, $f_2(t)$ восстановить функции $u(r,t)$, $v(r,t)$ и $\sigma(r)$. Рассмотрим взвешенную сумму функционалов $J_1[\sigma]$ и $J_2[\sigma]$:

$$J[\sigma]=\gamma J_1[\sigma]+(1-\gamma)\cdot J_2[\sigma],$$

здесь $\gamma\in[0,1]$ – взвешенная сумма функционалов.

Если выбрать γ равным 1 или 0, мы сведем нашу задачу к задачам (23)-(26) или (27)-(30) соответственно.

Для такого функционала выражение имеет вид:

$$J'[\sigma]=\gamma J'_1[\sigma]+(1-\gamma)\cdot J'_2[\sigma].$$

Теперь, используя градиентные методы, мы сможем найти приближенное значение функции σ.

Выводы

Следуя работе [4], нами построена совмещённая постановка решения обратной задачи по определению проводимости для уравнения геоэлектрики, но записанной в цилиндрической системе координат. Рассматривается оптимизационный метод решения обратных задач в волновой и квазистационарной постановке. Минимизируется функционал невязки как линейная комбинация рассматриваемых двух функционалов.

Построены согласовано-сопряженные разностные схемы решения прямой и сопряженных задач для дискретного оптимизационного метода по определению проводимости сред в волновом случае и определению проводимости в квазистационарном приближении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – 2-е изд. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 456 с.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач: задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация. – Москва: Наука, 1981. – 400 с.
3. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. – Новосибирск: НГУ, 2001. – 315 с.
4. Эпов М.И., Ельцов И.Н., Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Совмещенная постановка двух обратных задач геоэлектрики // Сибирские электронные математические известия. – 2011. – № 8. – С. 394-399.
5. Rysbaiuly B., Baymankulov A.T. Variational-difference method for determining the diffusion coefficient of soil water // International Journal of Academic Research. – 2012. – No. 2. – Pp. 84-91.
6. Karchevsky A.L. A proper flow chart for a numerical solution of an inverse problem by an optimization method // Numerical analysis and applications. – 2008. – No. 2. – Pp. 114-122.
7. Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О. Дискретный аналог оптимизационного метода решения обратной задачи для параболического уравнения // Вестник КарГУ им. Е.А. Букетова. Серия математика. – 2010. – № 2 (58). – С. 56-59.
8. Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О. Технология построения сопряженно-согласованных разностных схем для оптимизационного метода // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия естественно-технических наук. – 2012. – № 4 (89). – С. 66-71.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – Москва: Наука, 1989. – 432 с.

Ұңғыма маңындағы кеңістіктегі өткізгіштікті анықтаудың кері есебін бірлесіп қою алгоритмі

[1]***ШАХАТОВА Алия Талгатовна,*** *докторант, shakhatovaa@list.ru,*
[1]***МИРҒАЛИҚЫЗЫ Толқын,*** *PhD, доцент, m_t85@mail.ru,*
[1]*«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті» КеАҚ, Қазақстан, Астана, Сәтпаев көшесі, 2,*
**автор-корреспондент.*

Аңдатпа. *Ұңғыма маңындағы кеңістіктегі өткізгіштікті анықтаудың кері міндеті қарастырылады. Цилиндрлік координаттар жүйесінде жазылған қарастырылып отырған тікелей және кері есептердің бірлескен қойылымы тұжырымдалған. Электр барлаудың екі әдісі қарастырылды: жоғары жиілікті зондтау және өтпелі әдіс. Екі әдістің ақпаратын қолдана отырып, кері есептің бірлескен тұжырымы енгізілді. Бұл мәселені сандық шешу үшін оңтайландыру әдісі қолданылады. Бұл әдістің мәні жоғары жиілікті зондтау әдісі мен өтпелі әдістің бақыланатын және есептелген өрістерінің квадраттық байланысының квадраттық функционалының өлшенген қосындысын азайту болып табылады. Сандық шешім үшін бірлескен өндірісте электр барлауының тікелей және кері мәселелерін шешудің келісілген айырмашылық схемалары құрылды.*

Кілт сөздер: *ұңғыма кеңістігі, ұңғыма, электромагниттік өріс, цилиндрлік координаттар жүйесі, кері есептер алгоритмдері, оңтайландыру әдісі, функционалдылық.*

Algorithm for the Combined Formulation of the Inverse Problem of Determining Conductivity in the Near-well Space

[1]***SHAKHATOVA Aliya,*** *Doctoral Student, shakhatovaa@list.ru,*
[1]***MIRGALIKYZY Tolkyn,*** *PhD, Associate Professor, m_t85@mail.ru,*
[1]*NPJSC «L.N. Gumilyov Eurasian National University», Kazakhstan, Astana, Satpayev Street, 2,*
**corresponding author.*

Abstract. *The inverse problem of determining conductivity in the near-well space is considered. The combined formulation of the considered direct and inverse problems written in a cylindrical coordinate system is formulated. Have considered two methods of electrical exploration: high-frequency sensing and the method of transients. Using information from both methods, a combined formulation of the inverse problem is introduced. An optimization method is used to solve this problem numerically. The essence of this method is to minimize the weighted sum of the quadratic functional residuals of the observed and calculated fields of the high-frequency sensing method and the transient process method. For the numerical solution, consistent difference schemes for solving the direct and inverse problems of electrical exploration in a combined formulation are constructed.*

Keywords: *borehole space, borehole, electromagnetic field, cylindrical coordinate system, inverse problem algorithms, optimization method, functional.*

REFERENCES

1. Kabanihin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi. – 2-e izd. – Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009. – 456 p.
2. Vasil'ev F.P. Metody resheniya ekstremal'nyh zadach: zadachi minimizacii v funkcional'nyh prostranstvah, regulyarizaciya, approksimaciya. – Moscow: Nauka, 1981. – 400 p.
3. Kabanihin S.I., Iskakov K.T. Optimizacionnye metody resheniya koefficientnyh obratnyh zadach. – Novosibirsk: NGU, 2001. – 315 p.
4. Epov M.I., El'cov I.N., Kabanihin S.I., SHishlenin M.A. Sovmeshchennaya postanovka dvuh obratnyh zadach geoelektriki // Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya. – 2011. – No. 8. – Pp. 394-399.
5. Rysbaiuly B., Baymankulov A.T. Variational-difference method for determining the diffusion coefficient of soil water // International Journal of Academic Research. – 2012. – No. 2. – Pp. 84-91.
6. Karchevsky A.L. A proper flow chart for a numerical solution of an inverse problem by an optimization method // Numerical analysis and applications. – 2008. – No. 2. – Pp. 114-122.
7. Iskakov K.T., Oralbekova ZH.O. Diskretnyj analog optimizacionnogo metoda resheniya obratnoj zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya // Vestnik KarGU im. E.A.Buketova. Seriya matematika. – 2010. – No. 2 (58). – Pp. 56-59.
8. Iskakov K.T., Oralbekova ZH.O. Tekhnologiya postroeniya sopryazhenno-soglasovannyh raznostnyh skhem dlya optimizacionnogo metoda // Vestnik ENU im. L.N. Gumilyev. Seriya estestvenno-tekhnicheskih nauk. – 2012. – No. 4 (89). – Pp. 66-71.
9. Samarskij A.A., Gulin A.V. CHislennye metody. – Moscow: Nauka, 1989. – 432 p.