DOI 10.52209/1609-1825_2022_4_430 ӘОЖ 004.9:519.8(075.8)

"Жыртқыш-жемтік" биологиялық жүйесін компьютерлік модельдеу ерекшеліктері

[1]**НЫСАНОВ Ерназар Айдарович,** *ф.-м.ғ.д., профессор, nysanov51@bk.ru,*
[1]**ИСМАИЛОВ Абдулхаир Уттубекович,** *б.ғ.к., доцент, ismailovabilkair@gmail.com,*
[1]**БАЙДИБЕКОВА Айдын Орисбаевна,** *п.ғ.к., доцент, baidin6767@mail.ru,*
[1]***АБДИМАНАПОВА Гульнур Мусабековна,** *магистр, аға оқытушы, abdimanapova_gulnur@gmail.ru,*
[1]**КАРАТАЕВ Галымжан Серикович,** *PhD, аға оқытушы, galimzhan.87@mail.ru,*
[1]*Мұхтар Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Қазақстан, Шымкент, Тәуке хан даңғылы, 5,*
**автор-корреспондент.*

Аңдатпа. *Мақалада «Жыртқыш-жемтік» биологиялық жүйесін компьютерлік модельдеу ерекшеліктері қарастырылған. Жыртқыштар жемтіктермен тамақтанғандықтан, жемтіктер саны қысқара бастайды, ал жыртқыштар саны өсе бастайды. Алайда, ұзақ уақыт бойы осылай созылуы мүмкін емес. Біраз уақыттан кейін жыртқыштарға тамақ жетпей, олардың популяциясының өсуі тоқтап, тіпті азаяды. Нәтижесінде жемтіктер көбейе бастайды және олардың саны өседі. Одан әрі бұл процестер қайталанады және оларда периодтылық анықтала бастайды. «Жыртқыш-жемтік» биологиялық жүйесін сипаттау модельдері жеткілікті дәрежеде, солардың ішінде кең тарағандары Лотка-Вольтерра, логистикалық түзету енгізілген Лотка-Вольтерра және Холлинг-Тэннер модельдері. Қазіргі заманғы компьютерлік математика жүйесі Mathcad көмегімен осы жағдайлар компьютерлік модельденген және сипатталған. Mathcad түрлі құбылыстарды модельдеу және визуализациялау үшін өте қолайлы. Жоғарыда айтылған үш модель нәтижелері арасында алғаш рет салыстырмалы талдау жасалған. Талдау нәтижесінде келесілер айқындалды: Лотка-Вольтерра моделі өте әмбебап. Ол жыртқыштар мен жемтіктер популяциясының өзгеруін ғана емес, сонымен қатар бәсекелес фирмалардың мінез-құлқын, халық санының өсуін, соғысушы армиялардың санын, экологиялық жағдайдың өзгеруін, ғылымның дамуын және т.б. сипаттай алады. Жыртқыштар мен жемтіктер популяциясының тербелісі әрдайым байқала бермейді. Жыртқыштардың жемтіктерді жеу процесі үнемі жүріп жатса да, олардың тұрақты санын байқаймыз. Мұндай жағдай кейбір логистикалық түзетуді енгізуді талап етеді, бұл логистикалық түзету енгізілген Лотка-Вольтерра моделінде есепке алынған. Холлинг-Тэннер моделінің сызықсыздығы өте күшті, бұл олардың фазалық портретінің түрінен байқалады, оның орамалары эллипстерден айтарлықтай өзгеше. Бұл модельдің басты қасиеті-тербеліс тұрақты болуы мүмкін фазалық портреттің шекті циклімен беріледі. Ол жүйенің тұрақты жұмыс режимінде орнатылатын тербеліс амплитудасын анықтайды. Бұл ретте тербеліс тұрақты тербелістерге жақындай отырып, уақыт бойынша өшуі немесе өсуі мүмкін.*

Кілт сөздер: *биологиялық жүйе, «Жыртқыш-жемтік», Лотка-Вольтерра моделі, Холлинг-Тэннер моделі, компьютерлік модельдеу, Mathcad, фазалық портрет.*

Кіріспе. Енді жыртқыштар мен олардың жемтіктерінің (құрбандарының) бірге тұруы туралы мәселені қарастырамыз [1]. Жыртқыштар жемтіктермен тамақтанғандықтан, жемтіктер саны қысқара бастайды, ал жыртқыштар саны өсе бастайды. Алайда, ұзақ уақыт бойы осылай созылуы мүмкін емес. Біраз уақыттан кейін жыртқыштарға тамақ жетпей, олардың популяциясының өсуі тоқтап, тіпті азаяды. Нәтижесінде жемтіктер көбейе бастайды және олардың саны өседі. Одан әрі бұл процестер қайталанады және оларда периодтылық анықтала бастайды. «Жыртқыш-жемтік» биологиялық жүйесін сипаттау модельдері жеткілікті дәрежеде, солардың ішінде кең тарағандары Лотка-Вольтерра, логистикалық түзету енгізілген Лотка-Вольтерра және Холлинг-Тэннер модельдері. Бұл модельдер сәйкес шекаралық шарттары бар бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеулер жүйесімен сипатталады [2-5]. Қазіргі заманғы компьютерлік математика жүйесі Mathcad [6-10] көмегімен осы жағдайлар компьютерлік модельденген және сипатталған. Мақалада жоғарыда айтылған үш модель нәтижелері арасында алғаш рет салыстырмалы талдау жасалған. «Жыртқыш-жемтік» жүйесінің алғашқы модельдерінің бірі Лотка-Вольтерра моделі болды. Бұл модель төмендегіше сипатталады [2, 3]:

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x,$$
$$\frac{dy}{dt} = (-c + dx)y,$$
$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

бұл жерде x, y – жемтіктер мен жыртқыштардың саны; x_0, y_0 – жемтіктер мен жыртқыштардың бастапқы саны; a, b, c, d – тәжірибелік тұрақтылар. Жыртқыштар мен жемтіктер популяциясының тербелісі әрдайым байқала бермейді. Мұндай жағдай кейбір логистикалық түзетуді енгізуді талап етеді, бұл логистикалық түзету енгізілген Лотка-Вольтерра моделінде [2, 3] есепке алынған. Холлинг-Тэннер моделінің [4, 5] сызықсыздығы алғашқы модельдерге қарағанда өте күшті.

Шешу әдістері. Сәйкес шекаралық шарттары бар бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу үшін Mathcad ортасының [11-15] сандық әдісі, ал алынған нәтижелерді графикалық түрде бейнелеу үшін оның графикалық мүмкіндіктері қолданылды.

Алынған нәтижелер. «Жыртқыш-жемтік» жүйесін сипаттайтын жай дифференциалдық теңдеулер жүйесіне негізделген Лотка-Вольтерра моделіне сәйкес шекаралық шарттардағы шешімі және оның графикалық бейнесі Mathcad ортасында 1-суретте көрсетілген.

Алынған нәтижелер жыртқыштар мен жемтіктер популяциясының өзгеруін ғана емес, сонымен қатар бәсекелес фирмалардың мінез-құлқын, халық санының өсуін, соғысушы армиялардың санын, экологиялық жағдайдың өзгеруін, ғылымның дамуын және т.б. сипаттай алуын көрсетеді. Бұл модельмен тәжірибе жасап, модельденуші процестер тербелмелі ғана емес, периодты сипатқа ие болуы мүмкін екені айқындалды.

Жыртқыштар мен жемтіктер популяциясының тербелісі әрдайым байқала бермейді. Жыртқыштардың жемтіктерді жеу процесі үнемі жүріп жатса да, олардың тұрақты санын байқаймыз. Мұндай жағдай кейбір логистикалық түзетуді енгізуді талап етеді, ол 2-суретте көрсетілген логистикалық түзету енгізілген Лотка-Вольтерра моделінде есепке алынған.

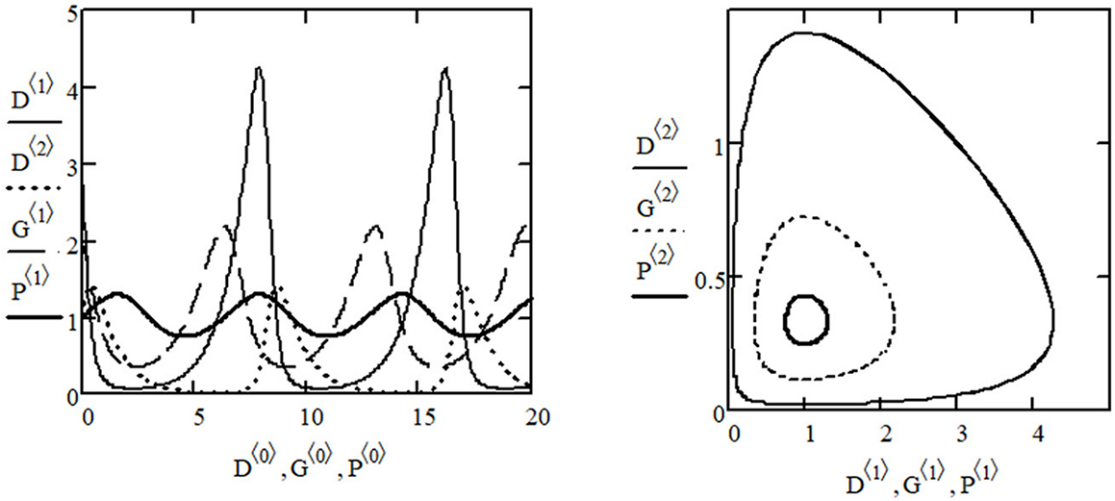
Бұл модельдегі қосымша α параметрі модель осцилляциясының (тербелісінің) өшуін басқаруға мүмкіндік береді. Бұл модельдің берілген параметрлерінде тербеліс процесі анық өшеді және жыртқыштар мен жемтіктер саны арасында ұзақ тепе-теңдік орнайды. Фазалық портрет тұрақты фокусқа ие болады. Фазалық портреттің түрі бұл жүйенің сәл ғана сызықсыз екендігін көрсетеді, сондықтан тербелістер өшетін синусоидаға ұқсайды. Бірақ $a < 0$ кезінде тұрақсыз фокус пайда болады және тербелістер өсе бастайды.

«Жыртқыш-жемтік» жүйесінің тағы бір сызықсыз моделін Холлинг-Тэннер ұсынған. Бұл модель бойынша модельдеу нәтижесі Mathcad ортасында 3-суретте бейнеленген.

Бұл модельдің екі маңызды ерекшелігі бар. Оның сызықсыздығы өте күшті, бұл олардың фазалық портретінің түрінен байқалады, оның орамалары эллипстерден айтарлықтай өзгеше. Бұл модельдің басты қасиеті-тербеліс тұрақты бо-

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F(t, Y) := \begin{bmatrix} (a - b \cdot Y_1) \cdot Y_0 \\ (-c + d \cdot Y_0) \cdot Y_1 \end{bmatrix} \qquad N := 500 \qquad ts := 0 \qquad tf := 20$$

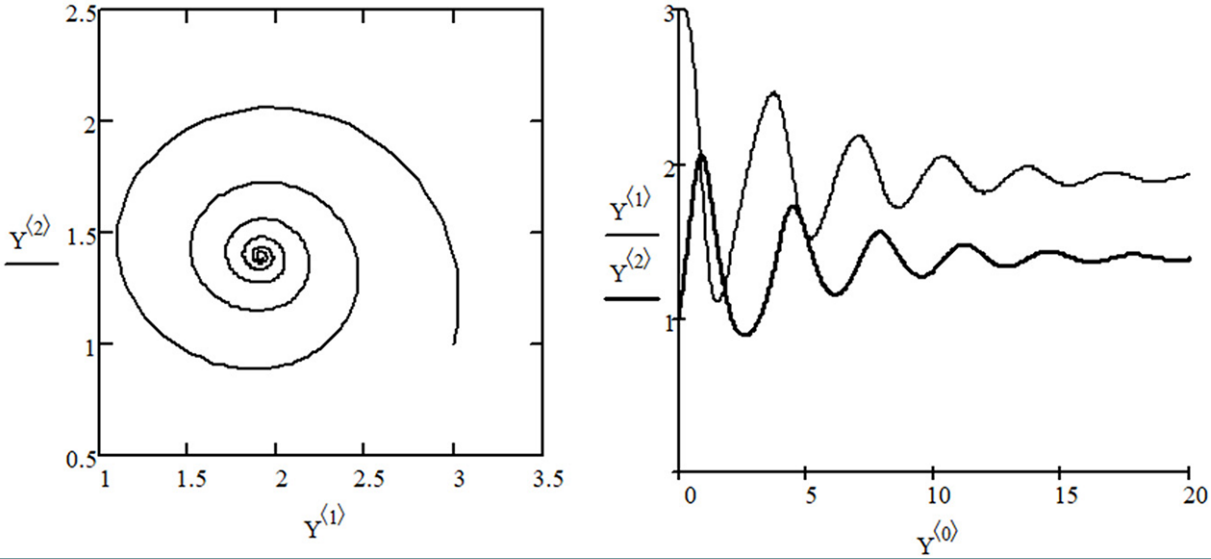
$$D := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, ts, tf, N, F\right] \qquad G := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ .5 \end{pmatrix}, ts, tf, N, F\right] \qquad P := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ .25 \end{pmatrix}, ts, tf, N, F\right]$$



1-сурет – «Жыртқыш-жемтік» жүйесінің Лотк-Вольтер моделі бойынша алынған шешім графигі

$a := 3 \qquad b := 2 \qquad c := 1.8 \qquad d := 1 \qquad \alpha := 0.08$

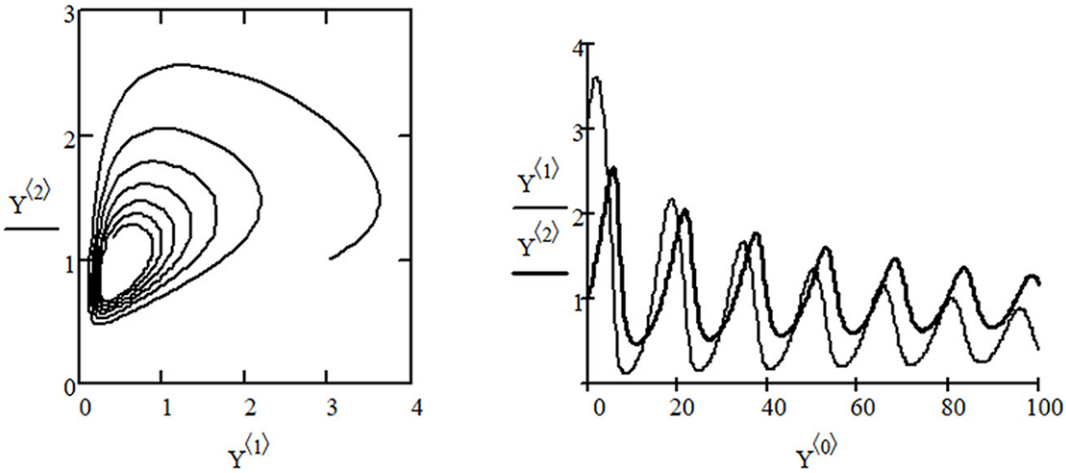
$$D(t,Y) := \begin{bmatrix} (a - b\cdot Y_1)\cdot Y_1 - \alpha\cdot(Y_0)^2 \\ (-c + d\cdot Y_0)\cdot Y_1 - \alpha\cdot(Y_1)^2 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Y := \mathrm{rkfixed}(Y,0,20,500,D)$$



2-сурет – Логистикалық түзету енгізілген «Жыртқыш-жемтік» жүйесінің Лотк-Вольтер моделі бойынша алынған шешім графигі

$r := 1 \qquad s := 0.25 \qquad K := 7 \qquad D := 1 \qquad J := 0.5 \qquad w := 1.5$

$$D(t,Y) := \begin{bmatrix} r\cdot\left(1 - \frac{Y_0}{K}\right)\cdot Y_0 - \frac{w\cdot Y_0\cdot Y_1}{D + Y_0} \\ s\cdot\left(1 - J\cdot\frac{Y_1}{Y_0}\right)\cdot Y_1 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Y := \mathrm{rkfixed}(Y,0,100,500,D)$$



3-сурет – Холлинг-Тэннер моделі бойынша «Жыртқыш-жемтік» жүйесін модельдеу

луы мүмкін фазалық портреттің шекті циклімен беріледі. Ол жүйенің тұрақты жұмыс режимінде орнатылатын тербеліс амплитудасын анықтайды. Бұл ретте тербеліс тұрақты тербелістерге жақындай отырып, уақыт бойынша өшуі немесе өсуі мүмкін.

Қорытынды. Қазіргі заманғы компьютерлік математика жүйесі Mathcad түрлі құбылыстарды модельдеу және визуализациялау үшін өте қолайлы. Жоғарыда айтылған үш модель нәтиже-

лері арасында алғаш рет салыстырмалы талдау жасалған. Талдау нәтижесінде келесілер айқындалды: Лотка-Вольтерра моделі өте әмбебап. Ол жыртқыштар мен жемтіктер популяциясының өзгеруін ғана емес, сонымен қатар бәсекелес фирмалардың мінез-құлқын, халық санының өсуін, соғысушы армиялардың санын, экологиялық жағдайдың өзгеруін, ғылымның дамуын және т.б. сипаттай алады. Бұл модельмен тәжірибе жасап, модельденуші процестер тербелмелі ғана емес, периодты сипатқа ие болуы мүмкін екені айқындалды. Жыртқыштар мен жемтіктер популяциясының тербелісі әрдайым байқала бермейді. Жыртқыштардың жемтіктерді жеу процесі үнемі жүріп жатса да, олардың тұрақты санын байқаймыз. Мұндай жағдай кейбір логистикалық түзетуді енгізуді талап етеді, бұл логистикалық түзету енгізілген Лотка-Вольтерра моделінде есепке алынған. Холлинг-Тэннер моделінің сызықсыздығы өте күшті, бұл олардың фазалық портретінің түрінен байқалады, оның орамалары эллипстерден айтарлықтай өзгеше. Бұл модельдің басты қасиеті-тербеліс тұрақты болуы мүмкін фазалық портреттің шекті циклімен беріледі. Ол жүйенің тұрақты жұмыс режимінде орнатылатын тербеліс амплитудасын анықтайды. Бұл ретте тербеліс тұрақты тербелістерге жақындай отырып, уақыт бойынша өшуі немесе өсуі мүмкін.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Романов В.П., Ахмадеев Б.А. Моделирование инновационной экосистемы на основе модели «Хищник-жертва» // Бизнес-информатика. 2015. № 1 (31). С. 7-17.
2. Зарипов Ш.Х., Никоненкова Т.В., Толмачева С.А. Модели динамики популяций на основе дифференциальных уравнений: реализация в среде R: Учебно-методическое пособие. – Казань: Изд-во Казанского федерального университета, 2017. – 30 с.
3. Соколов С.В. Модели динамики популяций: Учебно-методическое пособие. – Санкт-Петербург: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. – 61 с.
4. Comes C. Banking system: Three level Lotka-Volterra model // Procedia Economics and Finance, 2012, no. 3, pp. 251-255.
5. Кирьянов Д.В. Mathcad 15 / Mathcad Prime 1.0. СПб: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
6. Воскобойников Ю.Е., Задорожный А.Ф., Литвинов Л.А., Черный Ю.Г. Основы вычислений и программирования в пакете Mathcad: Учебное пособие. – Новосибирск: НГАСУ, 2012. – 212 с.
7. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Основы работы в математическом пакете Mathcad: Учебное пособие. – Донецк: Донецкий национальный технический университет, 2012. – 187 с.
8. Новиковский Е.А. Работа в Mathcad 15: Учебное пособие. – Барнаул: Алтайский государственный технический университет, 2012. – 114 с.
9. Maxfield B. Essential PTC(r) Mathcad Prime(r) 3.0: A Guide for New and Current Users. Academic Press. – 2013. – 584 p. ISBN: 9780124104105.
10. David Randolph, Martin II. Engineering Calculations with Creo Parametric and PTC Mathcad Prime. – Publisher: Independently published. – 2020. – 210 p. ISBN: 979-8649196673.

Особенности компьютерного моделирования биологической системы «Хищник-жертва»

[1]***НЫСАНОВ Ерназар Айдарович,*** *д.ф.-м.н., профессор, nysanov51@bk.ru,*
[1]***ИСМАИЛОВ Абдулхаир Уттубекович,*** *к.б.н., доцент, ismailovabilkair@gmail.com,*
[1]***БАЙДИБЕКОВА Айдын Орисбаевна,*** *к.п.н., доцент, baidin6767@mail.ru,*
[1]****АБДИМАНАПОВА Гульнур Мусабековна,*** *магистр, старший преподаватель, abdimanapova_gulnur@mail.ru,*
[1]***КАРАТАЕВ Галымжан Серикович,*** *PhD, старший преподаватель, galimzhan.87@mail.ru,*
[1]*Южно-Казахстанский университет имени Мухтара Ауэзова, Казахстан, Шымкент, пр. Тауке хана, 5,*
**автор-корреспондент.*

Аннотация. *Рассмотрены особенности компьютерного моделирования биологической системы «Хищник-жертва». По мере того как хищники питаются добычей, количество жертв начинает уменьшаться, а количество хищников начинает увеличиваться. Однако это может длиться недолго. Через некоторое время хищникам не хватает еды, и их популяция перестает расти и даже сокращается. В результате жертвы начинают размножаться, и их количество увеличивается. Затем эти процессы повторяются и начинают определять периодичность. Модели, описывающие биологическую систему «Хищник-жертва», довольно распространены, наиболее распространенные: модель Лотки-Вольтерры, модель Лотки-Вольтерры с логистической поправкой и модель Холлинга-Тэннера. В работе приведены компьтерное моделирование и описание этих явлений с помощью современной системы компьютерной математики Mathcad. Mathcad идеально подходит для моделирования и визуализации различных явлений. Впервые проведен сравнительный анализ результатов трех вышеуказанных моделей. Анализ показал следующее: Модель Лотки-Вольтерры достаточно универсальна. Она может описывать не только изменение популяций хищников и жертв, но и поведение конкурирующих фирм, рост народонаселения, численность воюющих армий, изменение экологической обстановки, развитие науки и пр. Колебания популяций хищников и жертв на самом деле наблюдаются не всег-*

да. Нередко мы наблюдаем стабильное количество тех и других, хотя процесс съедания жертв хищниками идет постоянно. Такой случай требует введения некоторой логистической поправки, которая учитывается в модели Лотки-Вольтерры с логистической поправкой. Нелинейность модели Холлинга-Тэннера довольно сильная, что видно из вида фазового портрета, витки которого заметно отличаются от эллипсов. Главное свйство этой модели заключается в том, что в конечном счете колебания задаются предельным циклом фазового портрета, который может быть устойчивым. Он и определяет амплитуду колебаний, которые устанавливаются в стационарном режиме работы системы. При этом колебания могут как затухать во времени, так и возрастать, приближаясь при этом к стационарным колебаниям.

Ключевые слова: *биологическая система, «Хищник-жертва», модель Лотки-Вольтерры, модель Холлинга-Тэннера, компьютерное моделирование, Mathcad, фазовый портрет.*

Features of Computer Modeling of the «Predator-prey» Biological System

[1]***NYSANOV Ernazar,*** *Dr. of Phys.-Math. Sci., Professor, nysanov51@bk.ru,*
[1]***ISMAILOV Abdulzair,*** *Cand. of Biol. Sci., Associate Professor, ismailovabilkair@gmail.com,*
[1]***BAYDIBEKOVA Aydin,*** *Cand. of Ped. Sci., Associate Professor, baidin6767@mail.ru,*
[1]****ABDIMANAPOVA Gulnur,*** *Master, Senior Lecturer, abdimanapova_gulnur@mail.ru,*
[1]***KARATAEV Galimzhan,*** *PhD, Senior Lecturer, galimzhan.87@mail.ru,*
[1]*Mukhtar Auezov South Kazakhstan University, Kazakhstan, Shymkent, Tauke Khan Avenue, 5,*

**corresponding author.*

Abstract. *The features of computer simulation of the biological system «Predator-prey» discussed. As predators feed on prey, prey starts to decrease and predators start to increase. However, this may not last long. After a while, predators do not have enough food, and their population stops growing and even decreases. As a result, the victims begin to multiply and their number increases. Then these processes are repeated and begin to determine the periodicity. Models describing the Predator-Prey biological system are quite common, the most common being the Lotka-Volterra model, the Lotka-Volterra model with a logistic correction, and the Holling-Tanner model. The paper presents computer simulation and description of these phenomena using the modern system of computer mathematics Mathcad. Mathcad is ideal for modeling and visualizing various phenomena. For the first time, a comparative analysis of the results of the three above models was carried out. The analysis showed the following: The Lotka-Volterra model is quite universal. It can describe not only changes in predator and prey populations, but also the behavior of competing firms, population growth, the size of warring armies, changes in the environmental situation, the development of science, etc. Fluctuations in predator and prey populations are actually not always observed. Often we observe a stable number of both, although the process of eating prey by predators is ongoing. Such a case requires the introduction of some logistic correction, which is taken into account in the Lotka-Volterra model with a logistic correction. The nonlinearity of the Holling-Tanner model is quite strong, which can be seen from the appearance of the phase portrait, the turns of which differ markedly from ellipses. The main property of this model is that, ultimately, the oscillations are set by the limit cycle of the phase portrait, which can be stable. It determines the amplitude of the oscillations, which are set in the stationary mode of the system. In this case, oscillations can both decay in time and increase in time, approaching stationary oscillations.*

Keywords: *biological system, «Predator-prey», Lotka-Volterra model, Holling-Tanner model, computer simulation, Mathcad, phase portrait.*

REFERENCES

1. Romanov V.P., Akhmadeev B.A. Modeling an innovation ecosystem based on the «Predator-prey» model // Business Informatics. 2015. No. 1 (31). pp. 7-17.
2. Zaripov Sh.Kh., Nikonenkova T.V., Tolmacheva S.A. Models of Population Dynamics Based on Differential Equations: Implementation in the R Environment: Study Guide. – Kazan: Publ. of Kazan Federal University, 2017. – 30 p.
3. Sokolov S.V. Models of population dynamics: Training manual. – St. Petersburg: Publ. of St. Petersburg Electrotechnical University «LETI», 2018. – 61 p.
4. Comes C. Banking system: Three level Lotka-Volterra model // Procedia Economics and Finance, 2012, no. 3, pp. 251-255.
5. Kiryanov D.V. Mathcad 15 / Mathcad Prime 1.0. Saint Petersburg: BHV-Petersburg, 2012. – 432 p.
6. Yu.E. Voskoboinikov, A.F. Zadorozhny, L.A. Litvinov, Yu.G. Fundamentals of calculations and programming in the Mathcad package: Textbook. – Novosibirsk: NGASU, 2012. – 212 p.
7. Alekseev E.R., Chesnokova O.V. Fundamentals of work in the mathematical package Mathcad: Textbook. – Donetsk: Donetsk National Technical University, 2012. – 187 p.
8. Novikovskiy E.A. Work in Mathcad 15: Textbook. – Barnaul: Altai State Technical University, 2012. – 114 p.
9. Maxfield B. Essential PTC(r) Mathcad Prime(r) 3.0: A Guide for New and Current Users. Academic Press. – 2013. – 584 rubles. ISBN: 9780124104105.
10. David Randolph, Martin II. Engineering Calculations with Creo Parametric and PTC Mathcad Prime. – Publisher: Independently published. – 2020. – 210 p. ISBN: 979-8649196673.