

Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың ақырлы элементі

¹*АХАЖАНОВ Сунгат Беркинович, PhD, қауымдастырылған профессор, stjg@mail.ru,

¹НУРЛАНОВА Баян Мухамбетовна, аға оқытушы, b.nurlanova@mail.ru,

²НУРГОЗИЕВА Айжан Жанабаевна, докторант, aizhanzhanabai@gmail.com,

³АХАЖАНОВ Талгат Беркинович, PhD, қауымдастырылған профессор, talgat_a2008@mail.ru,

¹Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қазақстан, 100028, Қарағанды, Университет көшесі, 28,

²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, 050040, Алматы, Әл-Фараби даңғылы, 71,

³Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Қазақстан, 010008, Нұр-Сұлтан, Сәтпаев көшесі, 2,

*автор-корреспондент.

Аңдатпа. Мақалада көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың конструкциялардың кернеулік және деформациялық күйі қарастырылған. Көлденең ығысу деформациясы ақырлы элементтің түйіндеріндегі бұрыштық жылжулар арқылы еркіндік дәрежесін көтермей-ақ ескерілген. Ақырлы элементтер әдісімен алынған есептеу нәтижелері аналитикалық әдістермен салыстырылған.

Кілт сөздер: ақырлы элементтер әдісі, көлденең ығысу деформациясы, қатаңдық матрица, көлденең ығысу параметрі, тік жылжу.

Кіріспе

Арқалықтың иілуінің классикалық үлгісі Бернулли гипотезаларына негізделіп жасалынған [1]. Бернулли гипотезасы бойынша жазықтықта көлденең сызықтық және ығысу деформациялары болмайды деп болжанады. Бұл жағдайда көлденең нормалдық және жанамалық кернеулер тепе-теңдік теңдеулерінде сақталады. Изотропты және ортотропты сызықты серпімді материалдар үшін ығысу деформациясы жанамалық кернеуді ығысу модуліне бөлу арқылы анықталады. Созылу және иілу кезінде серпімділік модулімен салыстырғанда ығысу модулі неғұрлым үлкен болса, ығысу деформацияларының жоқтығы туралы гипотеза пайдаланылады, керісінше, ығысу модулі неғұрлым аз болса, гипотезаны қолдану соғұрлым күрделі болады. Бұл әсіресе көлденең бағытта күшейтілмеген ортотропты пластиналардың иілу мәселесі үшін маңызды болып саналады.

Эйлер-Бернулли арқалықтарының көлденең қимасы иілгеннен кейінде бейтарап өске перпендикуляр болып қалады, ал Тимошенко арқалықтарының көлденең қимасы бастапқыда бейтарап өсіне перпендикуляр, бірақ иілу деформациясынан кейін перпендикуляр жағдайын жоғалтады [2].

Композиттік материалдардың пайда болуымен, физикалық тұрғыдан өте осал байланысқан композиттік құрылымдағы арқалықтар мен пластинаның иілуінің классикалық емес үл-

гілерін құру мәселесі өзекті санала бастады [3-5]. Көлденең ығысу деформациясының арқалықтың кернеулік-деформациялық күйіне әсерін аналитикалық зерттеу және есептеу моделін құру [6] еңбектерінде кездеседі.

Классикалық деформация теориясы мен бірінші ретті ығысу деформациясы теориясы арасындағы алшақтықты жою үшін жоғары дәрежелі ығысу деформациясының, яғни нақтыланған ығысу деформациясының теориялары жасалды [7-10]. Бұл теориялар арқалықтың жоғарғы және төменгі беттеріндегі шекаралық шарттардың кернеусіз жағдайын қанағаттандырады және осылайша ығысудың түзету коэффициентін енгізу қажеттілігін жояды. Stein M. [11] қалыңдығы бойынша ығысудың әсерін көрсету үшін тригонометриялық функцияларды қолдана отырып, нақтыланған теориялардың тағы бір шешімін көрсетті.

Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтардың иілу мәселелері көптеген еңбектерде қарастырылды [12,13]. Авторлар көлденең ығысу деформациясын ескеретін теорияға сүйене отырып, есептің сандық шешімдерін ұсыну үшін ақырлы элементтер әдістерін қолданады. Kant T. және Gupta A. [14], Heyliger P.R. мен Reddy J.N. [15] біртекті тіктөртбұрышты арқалықтар үшін жоғары дәрежелі ығысу деформациясы бар ақырлы элементтердің модельдерін ұсынды. Do Thang [16] көлденең ығысуды ескергендегі арқалықтың нақтыланған теориясын алу үшін теориялық шек-

теулерді жоюға мүмкіндік беретін ақырлы элементтер әдісін қолданды.

Мақалада ақырлы элементтер әдісін қолданып, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың жетілдірілген есептеу теориясы ұсынылды.

Зерттеу әдістері

Ақырлы элемент (1-сурет) біртекті материалдан және ұзын арқалықты есептегенде қолданылады.

Егер арқалықтың материалы композит болып табылса, онда көлденең ығысу деформациясын ескерген жөн. Оны ескеру үшін негізгі тәуелділікті скаляр түрінде жазамыз:

$$F_m = K_{m1} W_i + K_{m2} \varphi_i + K_{m3} W_j + K_{m4} \varphi_j, m = 1, 2, 3, 4. \quad (1)$$

Ақырлы элементтің кез келген қимасындағы көлденең күш Q қима әдісі және негізгі тәуелділік бойынша былайша анықталады:

$$Q = -F_i = F_j = -\frac{EJ}{\ell^2} \left[\frac{12}{\ell} W_i + 6\varphi_i - \frac{12}{\ell} W_j + 6\varphi_j \right], \quad (2)$$

мұнда EJ , ℓ – арқалықтың ақырлы элементінің иілу қатаңдығы және ұзындығы.

Осы (2) көлденең күшті басқаша түрде былайша табуға болады:

$$\tilde{Q} = -GA \cdot \beta, \quad (3)$$

мұнда GA , β – көлденең ығысудағы қатаңдық пен бұрыш.

Осы (2) және (3) екі көлденең күш өрнектерін бір-бірімен теңестіріп, көлденең ығысу бұрышын иілу кезіндегі жылжулармен анықтаймыз:

$$\tilde{Q} = Q : \beta = g \left[\frac{12}{\ell} W_i + 6\varphi_i - \frac{12}{\ell} W_j + 6\varphi_j \right], g = \frac{EJ}{GA \cdot \ell^2}, \quad (4)$$

мұнда g – көлденең ығысу параметрі.

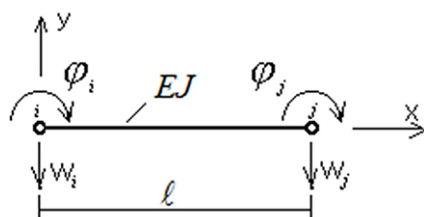
Енді мынадай жаңа бұрыштық жылжуларды енгізейік:

$$\varphi_i^0 = \varphi_i + \beta, \quad \varphi_j^0 = \varphi_j + \beta. \quad (5)$$

(5) формуланы қолдану арқылы (4) өрнек-тен көлденең ығысу бұрышын жаңа жылжулар арқылы табамыз.

$$\beta = \alpha \left[\frac{12}{\ell} W_i + 6\varphi_i^0 - \frac{12}{\ell} W_j + 6\varphi_j^0 \right], \alpha = \frac{g}{1 + 12g}. \quad (6)$$

Енді (5) және (6) ескере отырып, негізгі тәуелділікті (1) былайша анықтаймыз:



1-сурет – Ақырлы элемент

$$F_m = K_{m1} W_i + K_{m2} \varphi_i^0 + K_{m3} W_j + K_{m4} \varphi_j^0 - (K_{m2} + K_{m4}) \cdot \beta = S_{m1} W_i + S_{m2} \varphi_i^0 + S_{m3} W_j + S_{m4} \varphi_j^0. \quad (7)$$

Ақырлы элементтің көлденең ығысу ескерілгендегі негізгі тәуелділігі мына түрде болады:

$$\tilde{R} = S \cdot \tilde{z}, \quad \tilde{R}^T = [F_i M_i F_j M_j], \quad \tilde{z}^T = [W_i \varphi_i^0 W_j \varphi_j^0]. \quad (8)$$

Осы ақырлы элементтің көлденең ығысуды ескергендегі қатаңдық матрицасы болады:

$$S = \frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12\alpha_0 & 6\alpha_0 \ell & -12\alpha_0 & 6\alpha_0 \ell \\ 6\alpha_0 \ell & (3\alpha_0 + 1)\ell^2 & -6\alpha_0 \ell & (3\alpha_0 - 1)\ell^2 \\ -12\alpha_0 & -6\alpha_0 \ell & 12\alpha_0 & -6\alpha_0 \ell \\ 6\alpha_0 \ell & (3\alpha_0 - 1)\ell^2 & -6\alpha_0 \ell & (3\alpha_0 + 1)\ell^2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\alpha_0 = 1 - 12\alpha = \frac{1}{1 + 12g}.$$

Егер көлденең ығысу ескерілмесе $g=0$, онда $\alpha=0$, $\alpha_0=0$, сондықтан $S=K$ болады.

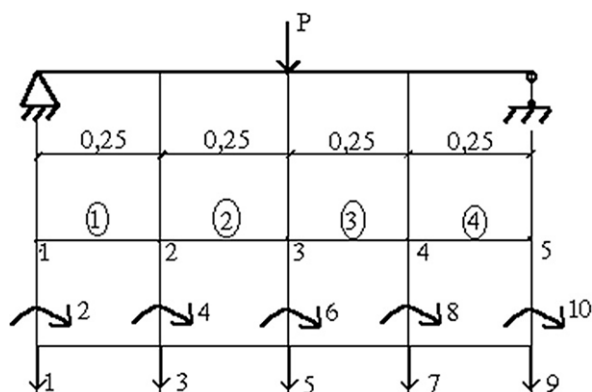
Көлденең ығысу деформациясын бұрыштық жылжулар арқылы ескергендегі ақырлы элементтің негізгі тәуелділігі (8) формасы бойынша (1) формулаға сәйкес келеді. Арқалықтың ақырлы элементінің негізгі тәуелділігі (1) материалы изотропты қатты арқалықтар үшін қолданылады. Егер арқалықтар композиттік материалдан жасалса, онда иілгіш болып табылады. Бұл жағдайда, α параметрі көмегімен көлденең ығысу деформациясы ескерілген (7) негізгі тәуелділікті пайдаланған дұрыс.

Нәтижелер мен талқылаулар

Ақырлы элементтер әдісін қолданып, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың иілуін анықтау үшін төмендегі есептерді қарастырайық.

Мысал 1. Бізге екі шеті топсалы түрде тірелген қарапайым арқалық берілсін (2-сурет). Арқалыққа шоғырланған $P=6$ кН күші әсер етсін. Арқалықтың ұзындығы $\ell=1$ м, ал материалының серпімділік модулі $E=1$ Па болсын. Пуассон коэффициенті $\nu=0,25$.

Бұл мысалда көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың деформациялық күйін анықтау қажет. Ол үшін арқалықты ұзындығы $\Delta\ell=0,25$ м төрт элементтерге бөліп, түйіндері мен



2-сурет – Топсалы тірелген арқалық

жылжуларын белгілейміз.

Арқалықтың көлденең қимасы тіктөртбұрыш болса, көлденең ығысу параметрі (4) бойынша анықталады.

$$g = \frac{5}{24} \left(\frac{h}{\ell} \right)^2.$$

Осы арқалықтың көлденең ығысу деформациясын ескергендегі деформациялық күйін зерттеп, нәтижесін алу үшін ақырлы элементтер әдісін қолданып бағдарлама құрылды. Бағдарламаның нәтижелері кестелер мен график (3-сурет) түрінде көрсетілді.

1-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g = 0$)

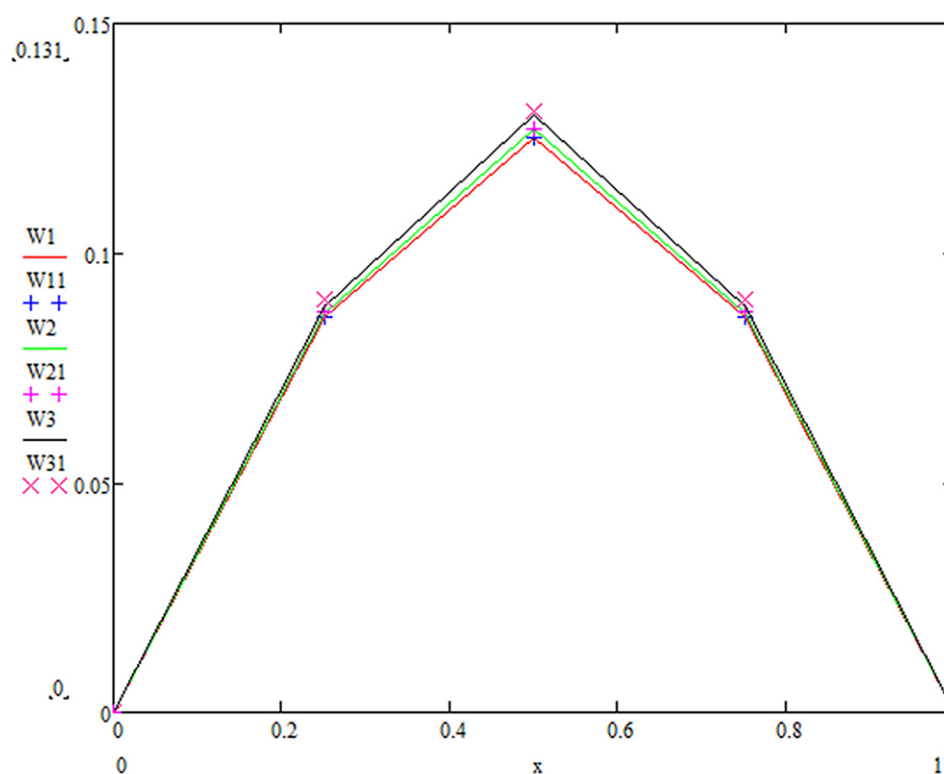
x	0	0,25	0,5	0,75	1
W1	0	0,0859	0,125	0,0859	0
W11	0	0,0860	0,125	0,0860	0

2-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g = 0,02315$)

x	0	0,25	0,5	0,75	1
W2	0	0,08702	0,12717	0,08702	0
W21	0	0,08710	0,12722	0,08710	0

3-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g = 0,05208$)

x	0	0,25	0,5	0,75	1
W3	0	0,088	0,1298	0,088	0
W31	0	0,090	0,1300	0,090	0



$g=0$ (W1,W11); $g=0,02315$ (W2,W21); $g=0,05208$ (W3,W31)

W1, W2, W3 – ұсынылған әдіс бойынша алынған тік жылжудың мәндері,
W11, W21, W31 – белгілі аналитикалық әдіс бойынша алынған нәтижелер

3-сурет – Топсалы тірелген арқалықтың тік жылжуының эпюралары

Мысал 2. Екі шеті қатты бекітілген арқалықты қарастырайық (4-сурет). Арқалыққа екі шоғырланған $P_1=P_2=10$ кН күштер әсер етсін. Арқалықтың ұзындығы $\ell=4$ м, ал материалының серпімділік модулі $E=1$ Па болсын. Пуассон коэффициенті $\nu=0,25$.

Есептеу алгоритмі алдыңғы мысал бойынша жасалады. Қатты бекітілген арқалықтың ұзындығы $\Delta\ell=5$ м сегіз элементтерге бөлініп, түйіндері мен жылжулары белгіленеді. Бұл мысалдың нәтижелері төменде көрсетілген.

Қорытынды

Ұсынылып отырған жұмыста ақырлы элементтер әдісін қолданып, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың жетіл-

дірілген есептеу теориясы алынды. Классикалық теорияда қарастырылмайтын көлденең ығысу деформациясы, ақырлы элементтің түйіндеріндегі бұрыштық жылжулар арқылы еркіндік дәрежесін көтермей-ақ ескерілді. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі иілген арқалықтың ақырлы элементі және қатаңдық матрицасы табылды. Шешуші теңдеулер жүйесі толығымен автоматтандырылды.

Есептеу нәтижелері кестелер және эпюралар түрінде көрсетіліп, аналитикалық әдістермен салыстырылды. Алынған нәтижелер көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтық конструкциялардың кез келген нүктесінде пайда болатын жылжулар мен кернеулерді анықтауға мүмкіндік береді.

4-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g=0$)

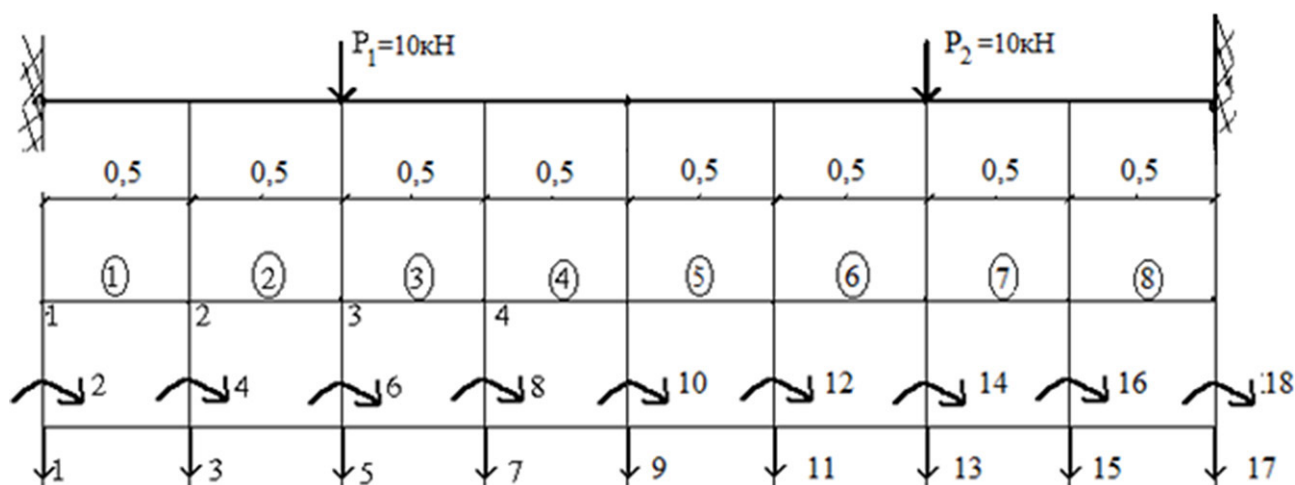
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
W1	0	0,729	2,083	3,021	3,333	3,021	2,083	0,729	0
W11	0	0,730	2,084	3,022	3,334	3,022	2,084	0,730	0

5-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g=0,02315$)

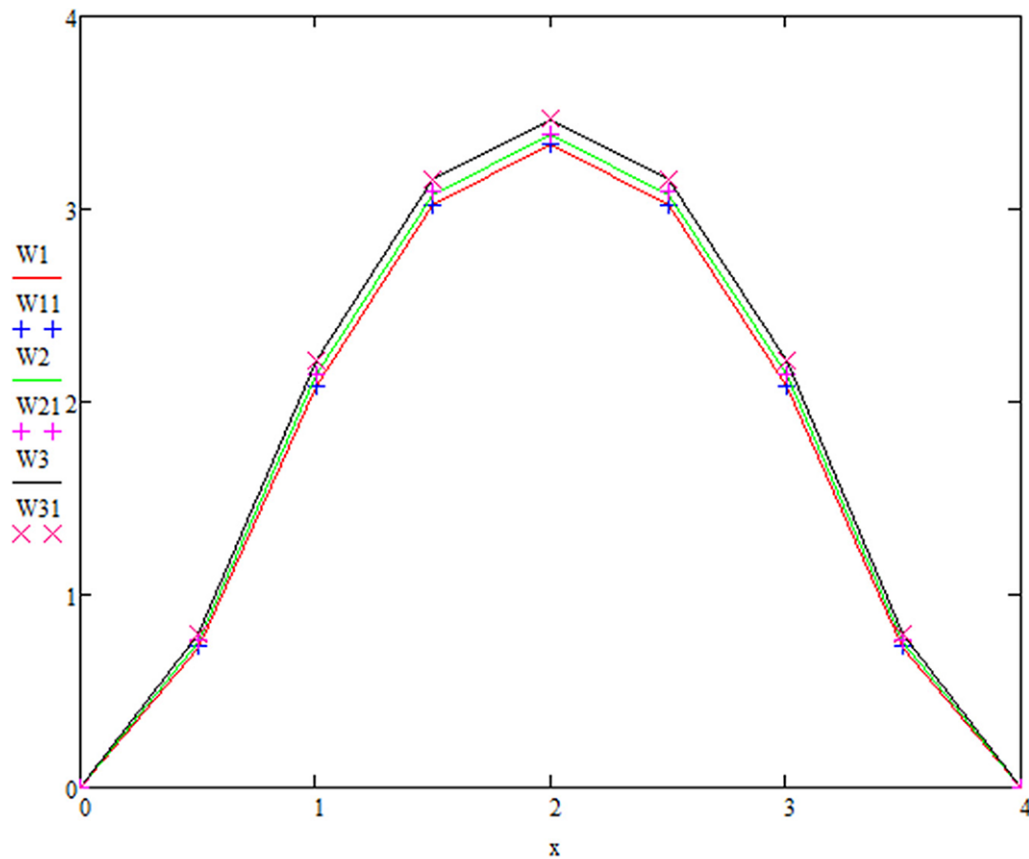
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
W2	0	0,758	2,139	3,07	3,385	3,07	2,139	0,758	0
W21	0	0,761	2,141	3,09	3,387	3,09	2,141	0,761	0

6-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g=0,05208$)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
W3	0	0,794	2,214	3,151	3,464	3,151	2,214	0,794	0
W31	0	0,799	2,219	3,156	3,469	3,156	2,219	0,799	0



4-сурет – Екі шеті қатты бекітілген арқалық



$g=0$ (W1,W11); $g=0,02315$ (W2,W21); $g=0,05208$ (W3,W31)

W1, W2, W3 – ұсынылған әдіс бойынша алынған тік жылжудың мәндері,
W11, W21, W31 – белгілі аналитикалық әдіс бойынша алынған нәтижелер
5-сурет – Қатты бекітілген арқалықтың тік жылжуының эпюралары

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
3. Васильев В.В., Лурье С.А. Вариант уточненной теории изгиба балок из слоистых пластмасс // Механика полимеров. – 1972. – № 4. – С. 577-768.
4. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. Beam Structures: Classical and Advanced Theories. – Wiley, 2011. – 204 p.
5. Altenbach H., Chróścielewski J., Eremeyev V.A., Wiśniewski K. (Eds.) Recent Developments in the Theory of Shells. – Springer, 2019. – 799 p.
6. Фирсанов В.В. Расчетные модели изгиба балки с учетом деформации сдвига // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – № 1 (26). – С. 98-107.
7. Levinson M. A new rectangular beam theory // Journal of Sound and Vibration. – 1981. – Vol. 74. – No. 1. – P. 81-87.
8. Bickford W.B. A consistent higher order beam theory // International Proceeding of Development in Theoretical and Applied Mechanics (SECTAM). – 1982. – Vol. 11. – P. 137-150.
9. Rehfield L.W., Murthy P.L.N. Toward a new engineering theory of bending: fundamentals // AIAA Journal. – 1982. – Vol. 20. – No. 5. – P. 693-699.
10. Bhimaraddi A., Chandrashekhara K. Observations on higher order beam Theory // ASCE Journal of Aerospace Engineering. – 1993. – Vol. 6. – No. 4. – P. 408-413.
11. Stein M. Vibration of beams and plate strips with three dimensional flexibility // J. App. Mech. – 1989. – ASME. – 56(1). – P. 228-231.
12. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: Its basis and fundamentals. – Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005. – 752 p.
13. Bathe K.J. Finite Element Procedure. – 2nd ed. Prentice-Hall International, 4th printing, 2016.
14. Kant T., Gupta A. A finite element model for higher order shears deformable beam theory // Journal of Sound and Vibration. – 1988. – Vol. 125. – No. 2. – P. 193-202.
15. Heyliger P.R., Reddy J.N. A higher order beam finite element for bending and vibration problems // Journal of Sound and Vibration. – 1988. – Vol. 126. – No. 2. – P. 309-326.
16. Do Thang. An improved method of calculating beam deformation considering transverse shear strain // International Journal of GEOMATE. – 2021. – Vol. 21. – Issue 83. – P. 109-116.

Конечный элемент балки с учетом деформации поперечного сдвига

¹*АХАЖАНОВ Сунгат Беркинович, PhD, ассоциированный профессор, stjg@mail.ru,

¹НУРЛАНОВА Баян Мухамбетовна, старший преподаватель, b.nurlanova@mail.ru,

²НУРГОЗИЕВА Айжан Жанабаевна, докторант, aizhazhanabai@gmail.com,

³АХАЖАНОВ Талгат Беркинович, PhD, ассоциированный профессор, talgat_a2008@mail.ru,

¹Карагандинский университет им. Е.А. Букетова, Казахстан, 100028, Караганда, ул. Университетская, 28,

²Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Казахстан, 050040, Алматы, пр. Аль-Фараби, 71,

³Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан, 010008, Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2,

*автор-корреспондент.

Аннотация. В статье рассматривается напряженно-деформированное состояние балочных конструкций с учетом деформации поперечного сдвига. Поперечные сдвиги учитываются через угловые перемещения узлов конечного элемента, не увеличивая его степени свободы. Полученные результаты расчетов методом конечных элементов сравниваются с аналитическими методами.

Ключевые слова: метод конечных элементов, деформация поперечного сдвига, матрица жесткости, параметр поперечного сдвига, вертикальное перемещение.

Finite Element of the Beam Taking Into Account the Transverse Shear Deformation

¹*AKHAZHANOV Sungat, PhD, Associate Professor, stjg@mail.ru,

¹NURLANOVA Bayan, Senior Lecturer, b.nurlanova@mail.ru,

²NURGOZIYEVA Aizhan, doctoral student, aizhazhanabai@gmail.com,

³AKHAZHANOV Talgat, PhD, Associate Professor, talgat_a2008@mail.ru,

¹E.A. Buketov Karaganda University, Kazakhstan, 100028, Karaganda, University Street, 28,

²Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, 050040, Almaty, Al-Farabi Avenue, 71,

³L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan, 010008, Nur-Sultan, Satpayev Street, 2,

*corresponding author.

Abstract. The article discusses the stress-strain state of beam structures, taking into account the deformation of transverse shear. Transverse shear are taken into account through the angular displacements of the nodes of the finite element, without increasing its degrees of freedom. The obtained results of calculations by the finite element method are compared with analytical methods.

Keywords: finite element method, transverse shear deformation, stiffness matrix, transverse shear parameter, vertical displacement.

REFERENCES

1. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow: Publ. Nauka, 1966. – 636 p.
2. Vasil'ev V.V. *Mehanika konstrukcij iz kompozicionnyh materialov* [Mechanics of Composite Structures]. Moscow: Publ. Mashinostroenie, 1988. – 272 p.
3. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. Variant utocnnoj teorii izgiba balok iz sloistyh plastmass [A variant of the refined theory of bending of beams made of laminated plastics]. *Mehanika polimerov*. – 1972. – No. 4. – pp. 577-768.
4. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. *Beam Structures: Classical and Advanced Theories*. – Wiley, 2011. – 204 p.
5. Altenbach H., Chróścielewski J., Eremeyev V.A., Wiśniewski K. (Eds.) *Recent Developments in the Theory of Shells*. – Springer, 2019. – 799 p.
6. Firsanov V.V. Raschetnye modeli izgiba balki s uchetoм deformatsii sdviga [Calculation models of beam bending taking into account shear deformation]. *Mehanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij*. – 2020. – № 1 (26). – pp. 98-107.
7. Levinson M. A new rectangular beam theory // *Journal of Sound and Vibration*. – 1981. – Vol. 74. – No. 1. – pp. 81-87.
8. Bickford W.B. A consistent higher order beam theory // *International Proceeding of Development in Theoretical and Applied Mechanics (SECTAM)*. – 1982. – Vol. 11. – pp. 137-150.
9. Rehfield L.W., Murthy P.L.N. Toward a new engineering theory of bending: fundamentals // *AIAA Journal*. – 1982. – Vol. 20. – No. 5. – pp. 693-699.
10. Bhimaraddi A., Chandrashekhara K. Observations on higher order beam Theory // *ASCE Journal of Aerospace Engineering*. – 1993. – Vol. 6. – No. 4. – pp. 408-413.
11. Stein M. Vibration of beams and plate strips with three dimensional flexibility // *J. App. Mech.* – 1989. – ASME. – 56(1). – pp. 228-231.
12. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The finite element method: Its basis and fundamentals*. – Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005. – 752 p.
13. Bathe K.J. *Finite Element Procedure*. – 2nd ed. Prentice-Hall International, 4th printing, 2016.
14. Kant T., Gupta A. A finite element model for higher order shears deformable beam theory // *Journal of Sound and Vibration*. – 1988. – Vol. 125. – No. 2. – pp. 193-202.
15. Heyliger P.R., Reddy J.N. A higher order beam finite element for bending and vibration problems // *Journal of Sound and Vibration*. – 1988. – Vol. 126. – No. 2. – pp. 309-326.
16. Do Thang. An improved method of calculating beam deformation considering transverse shear strain // *International Journal of GEOMATE*. – 2021. – Vol. 21. – Issue 83. – pp. 109-116.